





De Dn. Juan Campelo

ELEMENTOS
DE ARITMÉTICA,
ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA.

SU AUTOR

DON JUAN JUSTO GARCÍA,
Presbítero, Catedrático de Matemáticas de la Universidad de Salamanca, y Diputado á las Córtes de los años 20 y 21.

QUINTA IMPRESION.

TOMO SEGUNDO.

MADRID
IMPRENTA DE D. MIGUEL DE BURGOS
1822.

ÍNDICE

de las materias contenidas en este tomo.

SECCION I

CAPITULO I

De las figuras

SECCION II

SECCION III

SECCION IV

CAPITULO IV

Aplicacion del Algebra á la Geometría.

CAPITULO V

APÉNDICE.

Fe de erratas del segundo tomo que deben corregirse al tiempo de leerle.

Pág.	*línea*	*dice*	*ha de decir*
3	2	Capítulo I.°	Artículo I.°
8	25	A con uno de sus puntos AO	AO con uno de sus puntos A
18	27	inclineada	inclinada
21	7	á A	á AC
26	9	DRT	RTD
Id.	28	la BTD,÷DBD	la BTD÷DB
33	21	*eb*	*cb*
35	23	AC	AB
37	8	E=*e*	E=*c*
45	11	*ad*	*bd*
Id.	12	*bd*	*ad*
54	20	*ácb*	*acb*
59	29	fig. E	fig. H
82	15	*abea*	*abca*
97	13	*e*	*el*
121	15	*pea*	*peq*
139	7	$ab\times\frac{2+ab}{a+c}$	$ab\times\frac{a^2+ab}{a+c}$
109	15 y 20	(266)	(263)
160	primera	÷	+
169	22	(360)	(361)
171	16	(373)	(375)
180	27	(373)	(375)

ELEMENTOS
DE GEOMETRÍA

CAPÍTULO III

1 Todo lo que se presenta á nuestros sentidos ocupa algun espacio, y es á un mismo tiempo largo, ancho y grueso. Estos tres géneros de estension, *longitud*, *latitud* y *profundidad* son el obgeto de la *Geometría*, que los considera cada uno de por sí para averiguar mejor sus propiedades. Mide por eg. lo largo de un camino sin atender á su ancho, y la anchura de un rio sin calcular su profundidad. Llamarémos pues *sólido ó cuerpo* lo que abraza anchura, longitud y grueso como una pared. Pero si consideramos en la pared su ancho y largo, es decir, su cara ó esterior sin atender á su grueso, nos habremos formado idea de la *superficie* ó latitud: y si miramos solamente á su largo sin hacer caso de lo ancho, tendremos la idea de la *línea*. Esta la consideran los geómetras compuesta de

partes infinitamente pequeñas que llaman *puntos* y que son sus elementos: la superficie se la figuran como un tegido de infinidad de lineas, y el sólido como un paquete de infinidad de superficies: de suerte que los estremos de una linea serán puntos, los de la superficie lineas, y los del sólido superficies.

Téngase entendido que en el presente tratado haremos con las lineas superficies y sólidos el mismo uso que en la aritmética y álgebra de los signos +, —, = de el de la division, de los de las razones, proporciones y progresiones.

Asímismo conviene advertir que se da el nombre de *axioma* á una verdad evidente por sí; el de *teorema* á una proposicion que hay que probar: el de *corolario* á una consecuencia de lo ya probado, y el de *escolio* á una nota ó advertencia. Tambien se llama *problema* una cuestion que se trata de resolver: *lema* la proposicion que sirve para una demostracion: *postulado* suposicion licita que se hace para una demostracion: y *construccion* operacion preparatoria para ella. Aunque no pensamos usar de estos términos, importa enterarse de su significacion para poder disfrutar las obras que se valen de ellos.

SECCION I

Capítulo I

De las lineas y del circulo

2 Si se concibe que el punto A (fig. 1.ª) se mueve ácia B sin mudar de direccion ó por el camino mas derecho, dejando rastro tras sí, formará la linea recta concreta AB, que será la mas breve distancia entre los dos puntos A y B: la única que se puede tirar entre ellos, y de consiguiente la verdadera medida de la distancia que hay entre los dos.

La linea abstracta es la espresion de la relacion de direccion que hay entre dos lugares. Considerarémos trazadas las lineas sobre un plano ó superficie que tocan en todos sus puntos.

3 Por ser la linea recta la mas corta y la única que se puede tirar entre dos puntos A y B, quedará determinada la situacion ó posicion de una recta en señalando dos puntos, por donde debe pasar: y asi dos lineas rectas cualesquiera AS, AB no pueden tener dos puntos comunes, ó no se pueden cortar sino en un solo punto A; porque ningun otro está en la direccion de las dos.

4 Si el punto A que trazó la recta AB

hubiera caminado ácia B por otro camino diferente del recto, esto es, mudando á cada paso de direccion, hubiera descrito una linea *curva*, cual es AOB ó ADB: y como se puede ir desde A á B por infinitos caminos, habrá una infinidad de lineas curvas, siendo asi que es única la especie de las rectas. Es pues una *curva* una serie de pequeñas lineas cuyo principio y fin no puede discernirse.

5 Para tirar lineas rectas en el papel sirve la *regla*, *pluma* y *lapicero*, instrumentos vulgares y conocidos de todos; que saben que la regla ha de estar perfectamente derecha, y ha de tener en uno de sus lados un chaflan ó rebajo para que cuando se tiren las lineas con pluma y tinta, no se manche el papel.

6 Para trazar lineas en el terreno hay que prevenir piquetes de todos tamaños, ó palos labrados con su punta que clave en el suelo, y hendidos en el otro estremo para aplicarles en él un papel ó carton que los haga distinguir de lejos: los cuales se llaman *jalones*.

En un terreno llano se puede trazar una linea recta, si no ha de ser muy larga; atando los dos estremos de un bramante dado de greda algo estirado, á dos piquetes A, B (fig. 2.ª), puestos en los dos estremos de la linea: se tira del bramante ácia arriba, y dejándole caer con ímpetu contra el suelo, dejará impresa en él la recta que se pide.

Si ha de ser muy larga, se fija en uno de

sus estremos B (fig. 3.ª) un jalon A que quedará derecho sobre el suelo, si sigue la direccion de un hilo con un plomo, y otro M en D: despues se ponen otros dos T, N, ó mas intermedios, pero de suerte que mirando desde A el jalon M, se confunda con él, y seguramente estarán A y M en una misma linea BD, y lo mismo cualesquiera otros T, N, &c. intermedios que se coloquen del mismo modo. Cuando la linea es demasiado larga, se divide la operacion en dos, tres ó mas estaciones: y si median cuestas ó barrancos se alinean los piquetes segun exijan las circunstancias del terreno, y aconseje la práctica y el exercicio.

7 En la práctica de medir una linea cualquiera; que consiste en averiguar las veces que en ella cabe otra linea conocida que se toma por la unidad, como una linea de un pie, de una vara, no puede haber dificultad: y asi solo advertirémos que los prácticos en lugar de sogas de cáñamo, esparto &c. que padecen variaciones con el temporal, usan de una cadena de alambre grueso ó de hierro, cuyos eslabones suelen ser de un pie ó de una vara cada uno.

8 La principal medida que rige en Castilla, es la *Vara* que llaman de Burgos, señalada por Felipe II en su Pragmática del año de 1568, y compuesta de tres pies, cada pie de doce pulgadas, cada una de doce lineas &c. Tambien se usa del *Estadal*, que se compo-

ne de diez pies castellanos. Por lo que hace al tamaño de la vara de Aragon, Valencia, y la media cana de Cataluña, 95 palmos de los cuatro en que se divide la vara de Castilla, equivalen á 102 aragoneses, á 88 palmos valencianos y á 100 catalanes.

9 La medida mas general, y á que suelen reducirse las demas, es el *pie de rey*, sesta parte de la *toesa*, medida francesa. Dicho pie tambien se divide en 12 pulgadas, cada pulgada en 12 lineas &c. Para reducir á esta medida la de los diferentes pies de las demas provincias de Europa han considerado los geómetras dividida en diez partes iguales la linea que es $\frac{1}{144}$ de pie: y de las 1440 partes que por esta cuenta tiene el pie de rey, han encontrado que tiene el pie de......

Castilla...............	$1234\frac{2}{5}$	Bolonia......................	$1682\frac{3}{5}$
Roma.................	1320	Suecia....................	1320
Londres.............	1350	Dinamarca.........	$1403\frac{1}{5}$
Venecia.	1540	Constantinopla..	3120
Rhin.................	$1391\frac{1}{10}$		

Por medio de esta tabla se reducirán con una simple regla de tres los pies de una nacion á los de otra cualquiera; pero cuando haya que reducir á pies castellanos los franceses, será mejor usar de la razon sencilla de 6 : 7 que tiene el castellano al frances con poca diferencia.

10 De las lineas curvas solo hablarémos

por ahora de la *circunferencia del círculo*. Asi se llama la línea curva cerrada ADCE (fig. 4.ª) que traza el estremo A de una línea AO fija en O, dando una vuelta entera al rededor de dicho punto O que se llama *centro*. Al espacio encerrado por dicha curva llamamos *círculo*: á las rectas AO, OD, OE tiradas del centro á la circunferencia *radios*; y *diámetro* á cualquiera AC que pasando por el centro se termina por ambas partes en la circunferencia.

11 Como cada radio es igual á la línea AO que traza la curva, serán todos los radios iguales, y todos los puntos de la circunferencia distarán igualmente del centro.

Los diámetros que se compone cada uno de dos radios, serán todos iguales; y cualquiera de ellos dividirá el círculo por medio: pues si se dobla por él, todos los puntos de la una mitad caerán sobre los correspondientes de la otra, por distar todos igualmente del centro.

12 Cualquiera porcion TCP de circunferencia se llama *arco*, y *cuerda ó substensa* de dicho arco la recta TP tirada por sus dos estremos T, P. Bien se ve que los arcos iguales tienen cuerdas iguales AE, AD en un mismo ó en iguales círculos, y si las cuerdas son iguales, lo serán tambien los arcos: pues si doblando el círculo por AC se sobrepone el arco y cuerda ARE á AQD; caerá el punto E sobre D, y todos los puntos del arco ARE sobre los de AQD, como que todos distan igualmente

del centro; luego se ajustarán perfectamente los dos, y de consiguiente serán iguales. Por lo mismo, las mayores cuerdas subtenden mayores arcos, y al contrario.

Las circunferencias que tienen un mismo centro, ó se confundirán si los radios son iguales, ó no se tocarán si son desiguales: de consiguiente si dos circunferencias se cortan, señal que no tienen un mismo centro.

13 La mayor cuerda de un círculo es el diámetro; ED por eg. es mayor que cualquiera otra TP; pues los dos radios TO, PO tirados á sus dos estremos equivalen al diámetro, y dichos radios juntos son mayores que TP (2).

14 Un círculo cualquiera ADCE se traza en el papel con el *compás*, instrumento bien conocido, abriéndole de suerte que sus dos puntas caigan en O y A, y haciendo dar una vuelta entera á la punta A al rededor de la punta O que ha de estar fija.

ARTICULO II

De los ángulos y su medida

15 Si consideramos ahora que á la recta BE puesta sobre BA (fig. 5.ª), se la hace andar el espacio A con uno de sus puntos AO, teniendo el otro fijo en B, se habrá formado el ángulo OBA que es *el espacio* AO *comprendido entre dos lineas* BE, BA *que concurren*

en un punto B. Dichas lineas se llaman *lados* del ángulo, y el punto B su *vértice*. En adelante nombrarémos un ángulo ó con sola la letra B del vértice, ó con las tres EBA, ó ABE, poniendo en medio dicha letra B. El ángulo EBA se llama *rectilineo*, MNO (fig. 6.ª) *curvilineo*, y RSH *mistilineo* por la clase de lineas que los forman.

16 De la formacion del ángulo se colige que el espacio que encierra, se debe medir por un arco de círculo descrito desde el vértice como centro con cualquier intervalo: pues aunque sea menor el arco descrito á la distancia D′ que á D (fig. 5.ª): siempre será una misma la medida del ángulo CBD: pues el arco D′ C′ es la 4.ª parte de su círculo como lo es DC del suyo: de consiguiente el ángulo es siempre el mismo que se acorten ó que se alarguen sus lados.

17 Para medir los arcos del círculo le han considerado los geómetras dividido en 360 partes iguales con el nombre de *grados*: cada uno de estos en 60 *minutos*, cada minuto en 60 *segundos*, cada segundo en 60 *terceros* &c. Estas partes que son grandes ó pequeñas, segun que el círculo lo es, se indican con las señales $^{\circ}$, $'$, $''$, $'''$ &c. de suerte que $7^{\circ}\ 8'\ 36'',\ 9'''$, quiere decir *siete grados, ocho minutos, treinta y seis segundos y nueve terceros*.

Llamaremos *recto* el ángulo que tiene por medida 90° ó la 4.ª parte de la circunferéncia

como DBC, ABD, medidos por los arcos DC, DA; *agudo* el ángulo ABE cuya medida que es el arco OA, es menor que 90°; y *obtuso* aquel como CBE, al que mide un arco CDO mayor que 90.°

18 *Si una linea cualquiera* EB *cae sobre otra* AC, *forma siempre con ella dos ángulos* ABE, ABC *que juntos valen 180°, ó dos ángulos rectos*, pues su medida será siempre la mitad de la circunferencia (16). Alargando EB, la RB que cae sobre AC, forma tambien en B dos ángulos ABR, RBC que valen juntos otros 180.°

19 Luego 1.° todos los ángulos que se forman en un punto B cualquiera, valen 360°: 2.° el diámetro AC divide al círculo en dos partes iguales. 3.° Para dividir un ángulo en cualquier número de partes iguales, basta dividir el arco que le mide en otras tantas partes iguales, y tirar líneas desde el vértice á todos los puntos de division. 4.° Para medir el ángulo APD (fig. 7.ª) que forman dos paredes AO, OD; se alargará con una regla la base AP, y midiendo el ángulo DPC, será lo que le falta para 180° la medida del APD que se desea.

20 Lo que falta ó sobra á un ángulo ó arco para componer 90°, se llama su *complemento*: el del ángulo ABE (fig. 5.ª) es el ángulo EBD: y el de EBC es —EBD, y asi el complemento de un ángulo agudo es positivo, el

del ángulo recto es nulo, y el del obtuso es negativo.

21 *Suplemento* de un ángulo es lo que le falta ó sobra para componer 180°: el ángulo ABE por eg. es suplemento de EBC, y al contrario. De consiguiente el ángulo agudo tiene un obtuso por suplemento, el recto otro recto, y el obtuso un agudo.

22 Supuesto que los ángulos iguales deben tener suplementos y complementos iguales; y que deben ser iguales los ángulos que tengan unos mismos complementos y suplementos; colegiremos *que si se cortan como quiera, dos líneas* ER, AC *serán iguales los ángulos* ABE, RBC *opuestos al vértice* que llamarémos por eso *verticales*; pues tienen ambos un mismo suplemento, que es el ángulo EBC: lo mismo se debe entender de los ángulos EBC, ABR, cuyo suplemento comun es el ángulo ABE.

23 *Si dado el ángulo* OCD (fig. 8.ª) *se pidiese formar otro igual en un punto B de la recta* AB: se trazará desde C con cualquier abertura de compás el arco OD, con la misma abertura se trazará desde el punto dado B el arco indefinido AR: se tomará despues con el compás la distancia OD, que se trasladará de A á T, y tirando por B y T la linea BT, se habrá formado el ángulo TBA igual á OCD: pues que los arcos AT, DO que los miden, se han hecho iguales.

24 Con el instrumento MIIDT (fig. 9.ª)

que es un *semicírculo* de alaton ó cuerno dividido en sus 180° con sus suplementos debajo para poderlos contar por la derecha y por la izquierda; se puede formar en el papel un ángulo cualquiera: de 30° por eg. en el punto B de una recta BC, aplicando el radio BT del instrumento sobre BC; de manera que coincida su centro con el punto B, y tirando despues por este punto y el núm.° 30° que se pide, la recta AB: pues el ángulo ABC que resulta, es de 30.°

Asimismo, para medir con dicho instrumento un ángulo cualquiera ABC; puesto su centro en el vértice B del ángulo, y el radio BT sobre uno de sus lados: el arco DT que intercepten sus lados, alargados si es menester, mostrará el número de grados de que consta el ángulo ABC.

25 Un semicírculo (fig. 10.ª) de alaton de 7 á 15 pulgadas de diámetro dividido en 180° y en medios, cuartos &c. de grado á proporcion de su magnitud, sirve para medir y formar ángulos en el terreno. A este fin se coloca sobre un pie, y por medio de dos tornillos se le pone derecho, inclinado ó en cualquier otra situacion que requiera la direcion de las miras á los objetos que forman los ángulos.

26 Para dirigir á estos las lineas visuales hay una *regla* ó *alidada* CD movible al rededor del centro que tiene en medio una linea central con una *flor de lis* en su estremo, que

señala los grados. Al lado de ella hay doce divisiones, cada una de las cuales equivale por lo comun á $\frac{11}{12}$ de grado ó á 55, para sacar el valor del ángulo con mas exactitud, cuando la linea central no señala en el instrumento número fijo de grados. En los estremos de la alidada hay tambien dos *pínulas m, n* clavadas y hendidas muy perpendicularmente, lo mismo que las que tiene el diámetro inmovil AB en los puntos 0°, 180.° Cuando los objetos estan á mas distancia que de ocho á nueve mil varas, se usa de un anteojo que con otro cocolocado en el diámetro inmovil, descubre con mas claridad los objetos. Mas adelante hablarémos del modo de hacer uso de este instrumento.

ARTÍCULO III

De las lineas perpendiculares y oblicuas

27 Si una recta AS (fig. 11.ª) cae cortando la BD sin inclinarse á un lado ni á otro, ó formando los ángulos ACB, ACD iguales, que serán rectos (17 y 18), se llama *perpendicular* á ella. Cualquiera otra DS que corte la BD inclinándose mas un lado que á otro, se llama *oblicua.*

28 Luego 1.° la BD que no se inclina á A ni á S será tambien perpendicular á AS. 2.° Si cualesquiera dos puntos A, S de una linea

AS estan á igual distancia de otros dos B, D de la BD: todos los puntos de la AS distarán igualmente de B y D: pues los puntos de una linea tienen todos la posicion que dos de ellos (3): de consiguiente la AS no se inclinará á B ni á D, y le será perpendicular. Y como C ha de distar igualmente de B y D, dividirá tambien AS á la BD por medio.

29 3.° Con un solo punto A que tenga la perpendicular AS á igual distancia de los dos B, D de la BD sobre que cae, los deberá tener todos y dividirla por medio en C: pues si algun punto R por eg. no distára lo mismo de D y B; se inclinaria por esta parte á un lado mas que á otro, contra el supuesto de ser perpendicular.

30 4.° De todas las rectas AB, AE, AC, AO &c. (fig. 12.) que se pueden tirar de un punto A sobre otra BD, *la perpendicular* AC *es mas corta que cualquiera otra*, AB por eg. Pues haciendo CS=AC, y tirando BS; se tiene la AS menor que las dos AB+BS, y de consiguiente la mitad AC de AS mas corta que AB, mitad de AB+BS. Lo mismo se probará de otra cualquiera. Decimos que AB es la mitad de AB+BS ó que AB=BS; porque estando el punto C de la perpendicular CB á igual distancia de A y de S, lo estará tambien su punto B (29), y AB=BS.

31 *Las lineas mas oblicuas* ó que distan mas de C, *son las mas largas*; y asi AB es

mayor que AE: pues siendo AB+BS mayor que AE+ES, será la mitad AB de las primeras mayor que la mitad AE de las otras. De consiguiente serán iguales las AE, AO tiradas á E, O puntos igualmente distantes de C.

32 5.° *La perpendicular mide la distancia que hay de un punto á una recta, ó de una recta a otra*, pues es el camino mas corto.

33 6.° *Desde el punto* A *no se puede tirar mas perpendicular sobre* BD *que la* AC; pues esta sola es la mas corta que se puede tirar desde A sobre BD (30). *Ni tampoco desde* C *se puede levantar a* BD *mas perpendicular que* CA: pues otra cualquiera se inclinará á un lado mas que á otro.

34 *Para levantar una perpendicular en el punto* C *de la linea* BD (fig. 11.ª); se tomarán dos puntos E, O á igual distancia de C, y haciendo de ellos centro, se trazarán con el compás con una abertura mayor que EC dos arcos que se corten en un punto cualquiera A; se tirará por A y C la AC, y esta será la perpendicular (28): pues tiene dos puntos A, C á igual distancia de los dos E, O.

35 *Desde un punto* A *se bajará una perpendicular sobre* BD; trazando desde A con el compás un arco cualquiera EO que corte la BD en dos puntos E, O, y desde estos los dos arcos que se corten en S; tírese despues AS, y será la perpendicular (28): pues tiene tambien A y S á igual distancia de E y O.

36 De lo que se infiere que *si se pidiese dividir por medio una recta* BD; se trazarán haciendo centros en B y D, dos arcos que se corten en A y S; y la AS tirada por A y S, dividirá por medio la BD: pues distando igualmente A y S de B y D, todos los demas puntos de AS como C, distarán igualmente de B y D (28), y será BC=CD; luego &c.

37 El instrumento ABC (fig. 13.ª) de alaton con una charnela en B para que cerrado quepa en el *estuche matemático*, se llama *Escuadra*, y sirve para tirar perpendiculares en el papel, porque sus dos lados AB, BC forman un ángulo recto ABC. El mismo uso tiene la escuadra H de una madera dura y lisa.

38 *Para tirar en el terreno una perpendicular á la linea* AB (fig. 14.ª) *desde un punto* C: se fijará en este punto el medio de una cuerda, cuyos estremos se han de atar bien tirantes en dos puntos A, B de AB: se dividirá la AB por medio en D, y la CD será la perpendicular (28); por tener C y D á igual distancia de A y B.

Se levantará desde D una perpendicular á AB; tomando AD=BD, atando en A y B los estremos de una cuerda, por cuya mitad C y el punto D se tirará la CD, que será la perpendicular por lo que acabamos de decir.

39 Para esta operacion es muy cómodo y comun el valerse del *Cartabon ó Escuadra de Agrimensor* (fig. A), que es un círculo bas-

tante grueso de alaton ó madera de cinco á siete pulgadas de diámetro cortado á ángulos rectos por dos diámetros de igual grueso, en cuya mitad hay dos lineas que dividen el círculo en cuatro partes iguales, con pínulas hendidas en sus estremos semejantes á las del grafometro, lo mismo que el pie sobre que se coloca.

Para levantar en el punto C (fig. B) *una perpendicular á la linea* AB; colocado el cartabon en C, se alineará con la recta MNOP en que rematan los jalones clavados en la AB, la visual dirigida por las pínulas *t*, *s*; se hará despues colocar un jalon R de manera que se alinee con las otras pínulas *o*, *r*: hágase lo mismo con otro Q puesto a dos ó tres estadales de R, y si parece algun otro mas; y será la linea CH la perpendicular que se busca. Casi del mismo modo se baja una perpendicular al terreno desde un punto T, yendo acercando el instrumento hasta encontrar la linea TD con la visual que se dirige por las pínulas *o*, *t*.

ARTICULO IV

De las lineas paralelas

40 Llamarémos *paralelas* aquellas lineas AB, CD (fig. 15) que estando en un mismo plano, dos de sus puntos A, B tienen una direccion semejante á otros dos C, D, y diferente

de todas las demas direcciones imaginables. De esta definicion se sigue 1.° que todos los puntos de la una distarán igualmente de los puntos correspondientes de la otra, ó serán iguales las perpendiculares HO, MN: pues ambas miden la distancia de una á otra.

41 2.° Que si dos lineas AB, EP son paralelas á otra CD, serán paralelas entre sí; pues siendo por la suposicion $HO=MN$, y $OR=NS$, será $HO+OR=MN+NS$, y &c.

42 Lo 3.° que si se toman dos puntos H, M á igual distancia de la recta CD, y se tira por ellos la AB; será paralela á CD.

43 Lo 4.° que si de dos paralelas EC, PD (fig. 16) la una EC es perpendicular á AD, tambien lo deberá ser la PD, que por no estar inclinada á su paralela EC, ha de tener la misma inclinacion con la AD. Y al contrario, si una recta AD es perpendicular á EC, lo será tambien á su paralela PD (27 y 40). Ultimamente, si las EC, PD son perpendiculares á AD, serán paralelas; pues cayendo ambas sobre AD sin inclinarse á un lado ni á otro, no estarán inclinadas la una á la otra; luego serán paralelas.

44 Teniendo las paralelas una misma direccion no estará inclinada la una á la otra: y de consiguiente dos paralelas AB, CD (fig. 17) tendran la misma inclinacion con otra linea cualquiera SR que las corte: esta inclinacion ó direccion forma por cima y por bajo de las pa-

ralelas ángulos que serán respectivamente iguales. Luego si una linea SR corta á dos ó mas paralelas, forma iguales 1.º los ángulos o y t, x y n; p y z, e y m; que llamaremos correspondientes.

45 Lo 2.º *Tambien son iguales los angulos alternos* t y e, x y z; p y n, m y o; porque siendo o y t, iguales, y $o=e$ (22), será tambien $t=e$, y lo mismo se prueba de los demas, que se llaman *alternos* por formarse alternativamente uno por cima y otro por bajo de la secante: e, t; x, z son alternos *internos* porque están entre las paralelas; n, p; o, m, *esternos* por estar fuera.

46 Lo 3.º Los ángulos internos t, x de un mismo lado de la secante son suplemento el uno del otro; porque siendo $e=t$ (45), y e suplemento de x (18); lo será tambien t: tambien e es suplemento de z.

47 Al contrario, *siempre que una recta* RS *corta á otras dos* AB, CD *formando los ángulos correspondientes iguales, serán dichas lineas paralelas*: porque siendo igual su inclinacion con la SR, no estarán inclinada la una á la otra. Tambien *serán paralelas* AB, CD *si resultan iguales los ángulos alternos*: porque si $e=t$, siendo $e=o$ (22), será tambien $t=o$, es decir, iguales los ángulos correspondientes, y las lineas paralelas. Asimismo lo son cuando t es suplemento de x; pues siéndolo igualmente e (18), se tendrá $t=e$, y $t=o$ luego &c.

48 De aqui inferirémos 1.° que si dos ángulos MNA, CDE (fig. 18) tienen sus lados AN, ED; MN, y CD paralelos, serán iguales: porque alargando uno de los lados AN hasta B, se tiene ANM=ABC=EDC (44).

49 2.° *Que si se pide tirar una paralela á la recta* CD (fig. 17) *por un punto p*; tirada por *p* cualquiera recta RS, se traza desde *n* con cualquier intervalo *np* el arco *pq*, y desde *p* con el mismo intervalo el arco indefinido *rh*: se toma despues la distancia *pq* y trasladada de *r* á *h*, se tirará por *p* y *h* la AB que será la paralela que se busca, por haberse hecho iguales los ángulos correspondientes *pnq*, *rph* (23).

3.° Si se pidiese levantar una perpendicular en el estremo D (fig. 16) de una recta AD que no se puede alargar; se levantaria en cualquiera de sus puntos la perpendicular CE, y tirando como acabamos de decir, por el punto D una paralela á CE, sería perpendicular (43).

50 Con el instrumento (fig. C) compuesto de dos reglas unidas con dos hojas de laton, y paralelas, que se estrechan y apartan á arbitrio: se tiran cuantas paralelas se quieran en el papel: y para que no se manche con tinta, tiene un chaflan una de las reglas.

En el terreno se tira una paralela á la recta AB *por el punto* C (fig. D); levantando en A y B dos perpendiculares iguales AB,

BD; y tirando por C y D la CD que será paralela á AB (42).

Por esta operacion *se continúa una línea* AC (fig. E) *mas allá de un obstáculo*. pues si se levantan en A y C las dos perpendiculares iguales AE, CF, y tirando por E y F la EFH paralela á A, se bajan por dos de sus puntos G, H, las GD, HB iguales y perpendiculares á EH; será DB continuacion de AC.

ARTICULO V

De las líneas y de los ángulos en el círculo

51 *Una recta* CT (fig. 19) *tirada perpendicularmente desde el centro de un círculo á una cuerda* DS, *la divide por medio lo mismo que á su arco* DTS: porque estando el punto C de dicha perpendicular á igual distancia de los dos D y S, lo estarán todos los demas de CT (29); luego P y T distarán igualmente de D y S, y será de consiguiente DP=PS, y DT=TS.

52 Al contrario, si la CT divide por medio en P la cuerda DS, tendrá dos puntos C y P á igual distancia de D y S, y de consiguiente será perpendicular á DS: lo mismo sucede cuando CT divide por medio al arco DTS.

53 Luego 1.º los arcos ZD y QS de un mismo círculo comprendidos entre paralelas son iguales: pues dividiendo CT por medio a los

arcos ZDTSQ, y DTS, si de ZDT=TSQ quitamos DT=TS, quedará ZD=QS.

54 2.º Se podrá dividir un arco cualquiera ZTQ en dos partes iguales con la perpendicular bajada desde el centro sobre su cuerda ZQ; y la perpendicular CH bajada sobre TQ dividirá su mitad TSQ en otras dos. De suerte que toda la circunferencia de un círculo podrá dividirse en cuatro partes iguales, tirando en ella dos diámetros perpendiculares ED, AC (fig. 4.ª), y si cada uno de los arcos iguales AQD, DPC &c. se divide por medio, resultarán ocho arcos iguales; y se habrá partido la circunferencia en 16, 32, 64 &c. partes iguales dividiendo sucesivamente por medio dichos arcos.

55 3.º *Si dados tres puntos* M, N, O (fig. 19), *se pidiese trazar un círculo por ellos*, ó encontrar un punto C igualmente distante de los tres; se tirarán las cuerdas MO, NO, y divididas por medio con las perpendiculares RC, LC; el punto C donde estas concurren, es el centro del círculo que pasará por M, N, O: pues debiendo dichas perpendiculares pasar ambas por él (52), no puede ser otro que C, único punto que tienen comun.

56 La operacion es la misma cuando se da el arco MNO, y se pide su círculo ó su centro: pero es esencial que los tres puntos no esten en línea recta; pues si se diesen los puntos A, C, D (fig. 16); las perpendiculares

EC, PD debiendo ser paralelas (43), no podrian encontrarse.

57 De donde se inferirá que una recta no puede cortar á un círculo en tres puntos: como tambien, que dados tres puntos que no están en linea recta, queda determinado un círculo, que no podrá equivocarse con otro: pues si dos circunferencias se pudiesen cortar en tres puntos, tendrian un mismo centro, y no serian dos sino una misma la circunferencia.

58 Si desde un punto A (fig. 20) que no sea el centro de un círculo, se tiran á la parte de la circunferencia mas distante varias rectas AE, AD, AB, AF &c. 1.° AB *que pasa por el centro, es mayor que cualquiera otra* AD: pues tirando el radio CD=CB, AD es menor que AC+CD, ó que AC+CB ó que AB.

59 2.° AD *es mayor que* AE *que dista mas del centro*; pues tirado el radio CE, serán CO+OD juntas mayores que CD ó que CE su igual: quitando CO comun, queda OD mayor que OE, y añadiendo á ambas lineas OA, será DO+OA ó DA mayor que EO+OA: y como EO+OA son mayores que EA, será AD mucho mayor que AE.

60 Si se tiran á la parte de circunferencia mas inmediata las rectas AM, AN &c. *la AM que alargada pasa por el centro, es la mas corta*: pues tirado el radio CN, se tiene CA+AN mayores que CN ó que CM su igual: quitese CA comun, y queda AN mayor que AM.

61 Cuando el punto A (fig. 21) está fuera del círculo, sucede lo mismo: pues siendo AN+NC mayores que AC, resulta quitando de una parte el radio CN y de otra el CM, AN mayor que AM. Serán pues, iguales las lineas tiradas desde cualquier punto (fig. 20 y 21) á igual distancia del centro C: y como solo hay dos con esta condicion, una á la derecha de la AB y otra á su izquierda; no se podrán tirar desde dicho punto tres lineas iguales á la circunferencia; y si desde algun punto se pueden tirar mas de dos líneas iguales, será sin duda el centro del círculo.

62 Se llama *tangente* de un círculo á una línea AT.(fig. 22) que aunque se alargue no corta sino toca su circunferencia, y es solo en un punto que se llama del *contacto*: pues si le tocase en dos *m*, *n*, tiradas al centro las *Cm*, *Cn*, que serian iguales (11); serian mayores que la perpendicular CT, que se tirase entre ellas (39): luego estando el punto T en la circunferencia deberian caer fuera de ella *m* y *n*. Una línea AB que desde cualquier punto A fuera del círculo le corta en dos puntos E y B, se llama *secante*.

63 Tendrémos pues 1.º *que el radio* CT *debe ser perpendicular á la tangente* (3); pues es la linea mas corta que se puede tirar desde el centro á dicha tangente; y al contrario, la perpendicular AT al estremo T del radio CT, será tangente al círculo. Y así *para*

tirar una tangente al circulo en un punto T; se tira el radio CT, y se levanta en T la perpendicular AT: la cual debe ser única, por no poderse levantar mas perpendicular que una desde cualquier punto T (33).

64 2.º Si tres circunferencias de círculo se tocan dentro ó fuera; los centros C, D, R de los círculos, y el punto *o* del contacto están en una linea recta: porque debiendo los radios D*o*, R*o*, C*o* ser perpendiculares á la tangente; formarán sola una linea recta (63).

65 3.º Cualquier otra recta DO (fig. 23) tirada por el punto T que no sea la tangente, corta al círculo; de suerte que cualquier ángulo rectilineo BTD es mayor que el mistilineo BTPD, el cual será infinitamente pequeño: pero sin embargo puede ser dividido por infinidad de arcos T*h*, T*b*, &c. que se van acercando á la tangente AB, á proporcion que son mayores los radios con que se describen.

66 Conviene á veces medir los ángulos no con arcos descritos desde su vértice, sino con los de algun circulo junto al cual ó dentro del cual están formados: y por eso vamos á señalar á cada uno la medida que le corresponde, segun su diferente posicion. Empecemos por el ángulo ATD (fig. 24) que forma la tangente AT con la cuerda TD, que se llama *ángulo del segmento*, y tiene por medida *la mitad del arco* TRD *que subtende la cuerda.*

Para demostrarlo tírese por el centro el diámetro PQ paralelo á la cuerda TD, el RS perpendicular á PQ y el radio TC. El ángulo recto RCP es igual al ángulo ATC tambien recto: quítese de ambos el ángulo TCP igual á su alterno DTC, y quedará DTA=RCT: y como al ángulo RCT le mide el arco RT (16), mitad de DRT (51); este mismo medirá tambien al ángulo ATD. Valiendo los dos ángulos ATD DTB 180° (18) ó la mitad de toda la circunferencia TRDQSPT; si de ella se quita la mitad del arco RTD, medida del ángulo ATD, quedará la mitad de DQSPT por medida del ángulo DTB.

67 De esta proposicion se infiere que la medida de un ángulo BTD (fig 25) cuyo vértice está en la circunferencia (se llama *inscripto*) *es la mitad del arco* BD *que comprenden sus lados*, que son dos cuerdas. Porque tirada la tangente AT, si de la medida del ángulo ATB, que es la mitad de TDB, se quita la del ángulo ATD, que es la mitad de TD: quedará la mitad de BD que será medida del ángulo BTD.

68 Luego 1.° el ángulo del centro BCD es duplo del inscripto BTD que insiste sobre el mismo arco; pues la medida de BCD es el arco BD, y la BTD, ½DBD. Lo 2.° todos los ángulos inscriptos A, B, C, (fig. 26) de un mismo circulo que insisten sobre un mismo arco FD, son iguales; pues tienen una misma medida.

69 Lo 3.º *todo ángulo inscripto* BTR (fig. 27) *que estriba sobre el diámetro, es recto:* pues vale la mitad de 180º ó 90.º El que insiste en un arco menor que la semicircunferencia como TRB es agudo, y el que estriba como NMR en mayor arco que la semicircunferencia, es obtuso.

70 De consiguiente *se podrá levantar en el estremo* T *de la recta* TB *una perpendicular;* trazando un círculo desde cualquier punto C con el intervalo CT, tirando por el centro y el punto B en que el círculo corta la BT, el diámetro BR; pues la TR será perpendicular á BT; por ser el ángulo RTB recto.

71 Si se diese en el terreno la recta BD (fig. 28), para levantar en su estremo D la perpendicular; se atarán en B y D los estremos, y en A la mitad de una cuerda BAD: y pasando la parte AB á ser AC, será la CD perpendicular. Y al contrario, para bajar desde C una perpendicular ácia el estremo de la DB; atada la cuerda en C y B, y dividida en su mitad A, se pasa la AC á AD; y tirando CD, será la perpendicular. Porque siendo iguales las AC, AB, AD; será A el centro del círculo que pasa por C, D, B (57): y de consiguiente será CB diámetro, el ángulo CDB recto (69), y la CD perpendicular.

72 Para tirar dos tangentes á un círculo desde un punto O (fig. 29) dado fuera de él; despues de haber tirado la OC á su centro, se

trazará desde su mitad H con el intérvalo OH un círculo que cortará al dado en los dos puntos B, T, por los cuales y O tirando las OB, OT serán las tangentes: pues tirando los radios BC, CT; serán rectos los ángulos CBO, CTO (69): luego las OB, OT serán perpendiculares, y de consiguiente tangentes.

73 Si se pidiese trazar sobre la recta BD (fig. 30) un segmento de círculo, tal que todos los ángulos inscriptos en él como BAD, sean iguales á un ángulo dado X; se hará en uno de los estremos B de la BD un ángulo DBF igual á X, se levantará sobre BF la perpendicular indefinida BH, y en medio de BD otra perpendicular PT que cortará á la BH en un punto C que será centro del círculo que se pide: pues siendo la medida del ángulo DBF ó X la mitad de BTD (66), la misma que tiene el ángulo inscripto BAD y cualquier otro que insista sobre la cuerda BD; será el segmento BNAHD capaz del ángulo X como se pidió.

74 Por esta proposicion será fácil determinar el sitio de un punto T cualquiera, (fig. 29), conociendo el valor de los ángulos RTB, BTO que con dicho punto forman las rectas TR, TB, TO tiradas á los tres objetos R, B, O, cuya situacion es conocida: pues tirando las lineas BR, BO, y trazando sobre BR una porcion de círculo capaz del ángulo dado BTR, y sobre BO otra capaz del án-

gulo BTO; debiendo el punto T caer en ambos círculos, será aquel en que los dos se cortan.

75 La medida del ángulo BAR (fig. 31) que se llama *escéntrico* por tener su vértice fuera del centro del círculo en que está; *es la mitad de los dos arcos* BR+HC *que abrazan sus lados alargados.* Porque tirando por C la CD paralela á HR, será el ángulo BAR=BCD (44): y siendo (67) la medida de BCD, $\frac{1}{2}$ BD=$\frac{1}{2}$ BR+$\frac{1}{2}$ RD=$\frac{1}{2}$ BR+$\frac{1}{2}$ HC por ser RD=HC (53); será la medida de BAR, $\frac{1}{2}$ BR+$\frac{1}{2}$ HC.

76 La medida del ángulo ZCB formado en la circunferencia con la cuerda BC y la DC alargada, es tambien la mitad de los arcos BC+CD que subtenden las cuerdas: porque siendo DCB+BCZ=180° (18) ó la mitad de toda la circunferencia CHBRDC, si de ella se quita la medida del ángulo BCD que es $\frac{1}{2}$ BD; quedará $\frac{1}{2}$ BHC+$\frac{1}{2}$ CD por la del ángulo BCZ.

77 Un ángulo BAP (fig. 32) *circunscripto*, ó cuyo vértice está fuera del círculo, tiene por medida *la mitad del arco cóncavo* BP *en que insisten sus lados alargados si es menester, ménos la mitad del arco convexo* HR *que comprenden dichos lados.* Porque tirando la RC paralela a HB, el ángulo CRP que es igual á BAP (44), tiene por medida $\frac{1}{2}$ CP ó $\frac{1}{2}$ BP—$\frac{1}{2}$ BC, o últimamente $\frac{1}{2}$ BP—$\frac{1}{2}$ HR: pues BC=HR (53): luego la medida del ángulo BAP es $\frac{1}{2}$ BP—$\frac{1}{2}$ HR.

78 Si se tira HM paralela á la tangente

AX, se probará del mismo modo que al ángulo XAB le mide $\frac{1}{2}$XB$-\frac{1}{2}$XH: y últimamente tirando por Z una paralela á AX, se hallará que la medida del ángulo XAZ que forman las dos tangentes, es $\frac{1}{2}$XBPZ$-\frac{1}{2}$XHRZ.

De las Figuras

ARTICULO VI

De los triángulos y cuadriláteros

79 Dos solas líneas no abrazan espacio determinado: se necesitan tres, cuatro, cinco, ó mas para encerrarle. A este espacio cerrado llamarémos *figura*; *rectilínea*, *curvilínea* ó *mistilínea*, segun sean rectas ó curvas las líneas que la forman: á estas líneas *lados* de la figura: á la suma de todas *ambito*, *contorno*, o *perímetro*: é *isoperímetras* á las figuras que tienen perímetros iguales.

80 La figura ABC (fig. 33) se llama *triángulo* rectilíneo: se compone de tres lados AB, BC, AC, y de tres ángulos A, B, C: se llama *equilátero* cuando sus tres lados son iguales: *isósceles* (fig. 34) cuando son iguales dos: *escaleno* (fig. 35) cuando los tres son desiguales: *rectángulo* (fig. 36) cuando uno de sus ángulos D es recto: *obtusángulo* cuando uno de ellos D (fig. 35) es obtuso; y *acutángulo* (fig. 34) cuando todos tres son agudos.

81 Cualquiera de los lados AC (fig. 33) opuesto al ángulo B que se toma por vértice, se llama *base* del triángulo: y *altura*, la perpendicular BT tirada desde el ángulo B del vértice á la base. Se ve que cuando los ángulos A, C adyacentes á la base AC son agudos, cae la perpendicular dentro del triángulo: cuando es recto uno de dichos ángulos (fig. 36), es el mismo lado AD del triángulo: y cuando es obtuso (fig. 35), la OR cae fuera y sobre la base CD alargada. El lado AB (fig. 36) opuesto al ángulo recto D del triángulo ADB, se llama *hipotenusa.*

82 En el triángulo isósceles EDF (fig. 34) la perpendicular ER divide por medio la base DF: porque siendo ED y EF iguales, estará el punto E de la perpendicular ER, y de consiguiente todos los demas (29), á igual distancia de D y F: luego DR=RF.

83 *Los tres ángulos de cualquier triángulo valen siempre dos ángulos rectos* ó 180.º Si se da el triángulo ABC (fig. 37) y se hace pasar un círculo por sus tres ángulos (55), se verá (67), que la medida de todos tres es la mitad de toda la circunferencia; luego valen 180.º

84 De aquí se infiere 1.º que alargado cualquiera de los lados BC de un triángulo, el ángulo esterno ACD es igual á los dos internos y opuestos A y B: pues su medida es (76) ½(ATC+BRC), medidas de A y B (67).

85 2.º Que en ningun triángulo puede haber mas que un ángulo recto ó un obtuso: y cuando alguno es recto, serán los otros dos complementos el uno del otro (20): y asi conociendo el uno, será el otro lo que falta para 90°.

86 3.º Que cualquiera de los ángulos de un triángulo es suplemento de los otros dos (21), y se sabrá su valor restando la suma de ambos de 180°: y al contrario, restando de 180° un ángulo de un triángulo, resultará la suma de los otros dos. Por eso si dos ángulos de un triángulo son iguales á dos de otro, el tercero que es el suplemento, será tambien igual al tercero.

87 4.º Tambien se infiere que en cualquier triángulo los lados opuestos á iguales ángulos son iguales; y que si son iguales los lados, lo serán tambien los ángulos opuestos. Pues siendo iguales los ángulos, lo deben ser los arcos que son sus medidas, y de consiguiente sus cuerdas (12): y si lo son las cuerdas, lo serán los arcos, y los ángulos que miden. Y asi en el triángulo isósceles (fig. 34) siempre son iguales los dos ángulos D, F opuestos á los dos lados EF, ED iguales; y en el equilátero son iguales los tres ángulos, y por lo mismo vale cada uno 60° ó la tercera parte de 180.°

88 5.º Que al mayor lado de un triángulo estará opuesto el mayor ángulo, y al menor el menor: y al contrario, el mayor ángulo tendrá mayor lado enfrente: porque mien-

tras mayor sea la cuerda, mayor será el arco, y de consiguiente el ángulo que mide: y al contrario.

89 *Dos triángulos* ABC, *abc*, (fig. 38) *son iguales* 1.° *si los tres lados del uno son iguales á los del otro*, ó si AB=*ab*, AC=*ac*, CB=*cb*; pues sobreponiendo el triángulo *abc* á ABC de modo que *bc* caiga sobre BC; el punto *b* deberá caer en el arco de círculo descrito desde C con el intervalo *bc*=BC, y en el descrito desde A con el intervalo *ab*=AB: caerá pues en B, en donde se cortan dichos arcos; y el triángulo *abc* se ajustará ó confundirá con ABC; luego serán iguales.

90 2.° *Son iguales dos triángulos* ABC, *abc que tienen un lado* AC=*ac adyacente á dos ángulos* A, C: *a*, *c*, *iguales*; pues poniendo *abc*, sobre ABC, de suerte que *ac* caiga sobre su igual AC; caerán los puntos *a*, *c*, sobre A, C; y como los ángulos A, *a*; C, *c* son iguales, el lado *ab* caerá sobre AB y *cb* sobre CB; luego el punto *b* caerá sobre B, y los triángulos por ajustarse ó confundirse, serán iguales.

91 3.° *Tambien lo son cuando tienen un ángulo* B=*b formado por dos lados* AB, BC: *ab*, *bc tambien iguales*; pues sobreponiendo el triángulo *abc* á ABC, caerán los lados *ab*, *bc* sobre AB y BC, por ser iguales los ángulos B, *b*; y los puntos *a*, *c* sobre A, C, por la igualdad de los lados; luego *ac* caerá sobre AC, y los triángulos se ajustarán, ó serán iguales.

92 Para formar un triángulo de tres líneas dadas, ó cuyos tres lados sean iguales á los del triángulo *abc*; se toma una linea AC=*ac*, y trazando desde A con el intervalo *ab* y desde C con el intervalo *cb* dos arcos, se tirarán á A y C desde el punto B donde se cortan, las líneas BC, BA; y se tendrá el triángulo ABC=*abc*. Cuando se da una recta AC, y se pide formar sobre ella un triángulo equilátero; se trazan los arcos desde C y A con el intervalo AC, y luego se tiran las AB y BC. Si se diese un lado *ac* y los ángulos adyacentes *a*, *c* para hacer el triángulo; se formarian en los estremos A, C de una recta AC=*ac* dos ángulos A, C iguales á *a*, *c*; y de los lados AB, BC juntos en B resultaria el triángulo que se pide. En el caso que se den dos lados *ab* *bc* y el ángulo comprendido *b*; se forma un ángulo B=*b*, y cortando BC=*bc*, AB=*ab*, se tiene el triángulo pedido ABC.

93 El *cuadrilátero*, que es una figura formada por cuatro líneas y cuatro ángulos: se llama *trapezoide* (fig. 39), cuando no tiene lado alguno paralelo á otro; *trapecio* (fig. 40) cuando dos de sus lados AE, BC son paralelos; y *paralelogramo* cuando cada lado es paralelo á su opuesto. El paralelogramo se llama *rombo* (fig. 41) cuando sus cuatro lados son iguales y desiguales sus ángulos contiguos; *romboide* (fig. 42) cuando sus ángulos y lados contigüos son desiguales; *rectángulo* (fig. 43)

cuando sus ángulos son rectos, y desiguales dos lados; y *cuadrado* (fig. 44) cuando sus ángulos y lados son iguales. La recta EB (fig. 42) tirada de un ángulo al opuesto de cualquier figura, se llama *diagonal*; y la perpendicular AT ó BD á la base EC alargada si es menester, *altura del cuadrilátero.*

94 *Los cuatro ángulos de un cuadrilátero valen siempre* 360° *ó cuatro ángulos rectos*: pues tirada la diagonal AC (fig. 40), dichos ángulos son los de los triángulos ACE, ABC que valen 360 (83).

95 *Si dos lados* AD, CB (fig. 43) *de un cuadrilatero* ADBC *son iguales y paralelos, lo serán tambien los otros dos* AC, DB. Porque tirada la diagonal AB, los triángulos ACB, ABD que tienen el lado AB comun, AD=CB, é iguales los ángulos *t* y *o* (45), serán iguales (91); luego el lado AC=DB: y como son tambien iguales los ángulos alternos *x*, *y*, serán paralelos AC y BD (47).

96 De lo que inferiremos 1.° *que la diagonal* AC *divide el paralelogramo* ADBC *en dos triángulos* ACB, ABD *iguales*; pues ademas del lado AB comun á los dos, los ángulos *x*, *y*; *t*, *o* son iguales por las paralelas (45): luego (90), serán iguales los triángulos. De consiguiente, un triángulo cualquiera ABC será siempre la mitad de un *paralelogramo de igual base y altura que el.*

97 2.° *Los paralelogramos* ABCE, BCDF

(fig. 45) *de una misma ó igual base* BC, *que están entre unas mismas paralelas, ó que tienen una misma altura, son iguales*: pues los triángulos ABF, ECD que tienen AB=EC, BF=CD (95), é iguales los ángulos *m*, *n* comprendidos (48), serán iguales (91): quítese de ambos el triángulo EKF comun, y quedará AEKB=CKFD, y si se añade á ambas partes el triángulo BKC, resultará el paralelogramo ABCE igual al otro BCDF. De consiguiente *los triángulos de igual base y altura, ó que teniendo una misma ó igual base, estan entre unas mismas paralelas, son iguales*: pues son mitades de los paralelogramos iguales.

98 3.° *Las partes* HR, TX (fig. 46) *de dos paralelas* NO, MP *interceptadas entre otras dos paralelas* AB, CD, *son iguales*: pues resulta de ellas un paralelogramo HTXR cuya diagonal HX le divide en dos triángulos iguales: luego HR=TX: y en todo paralelogramo serán iguales los lados opuestos HT, RX; HR, TX.

99 4.° *Los ángulos opuestos* A *y* B, C *y* D (fig. 43) *de un paralelógramo son iguales.* Porque siendo paralelos AC, BD, deben valer 180° los ángulos A y D (46); y por ser paralelos AD, CB, tambien D y B valdrán 180°: luego A y B que tienen un mismo suplemento D, serán iguales (22): lo mismo se probará de C y D. De consiguiente, si uno de estos ángulos es recto, lo serán igualmente los

otros tres: pues si A es recto, lo será tambien su igual B; y habiendo de componer 180° los dos iguales C y D (94), serán tambien rectos ambos.

100 *Si dados dos lados bc, ce* (fig. 42), *y el ángulo c, se pidiese trazar un paralelogramo*; se tomará EC=bc, se formará en E un ángulo E=c, se cortará EA=ce, y tirando por A una paralela á EC y por C otra á EA, resultará el paralelogramo AECB que se pide: el cual será rectángulo, si el ángulo c fuese de 90°, y cuadrado si ademas fuese bc=ce.

ARTICULO VII

De los polígonos

101 Se llama generalmente *polígono* á la figura terminada por mas de cuatro líneas: y en particular *pentágono* á la que consta de cinco, *exágono* á la que tiene seis, *eptágono* á la de siete, *octógono* á la de ocho, *eneágono* á la de nueve, *decágono* á la de diez, *dodecágono* á la de doce..... *pentedecágono* á la de quince &c. Cuando todos los lados y ángulos de los polígonos son iguales, se llaman *regulares*, é *irregulares* cuando no lo son. Al ángulo B (fig. 47) cuyo vértice se mete dentro de la figura, le llamarémos *entrante*: y *salientes* á los demas que caen fuera de la figura.

102 Un polígono ABCDEF (fig. 48) cu-

yos ángulos tienen todos sus vértices en la circunferencia de un círculo, se dice estar *inscripto* en él, ó el círculo circunscripto al polígono: su perímetro que es tanto mayor cuanto mas lados tiene, es siempre menor que la circunferencia del círculo. Cuando los lados de un polígono PRTHMN tocan todos al círculo, se dice *circunscripto* á él, y el círculo inscripto en el polígono: su perímetro que es tanto menor cuanto mas lados tiene, es siempre mayor que la circunferencia del círculo.

De consiguiente, cuanto mas lados tenga un polígono inscripto ó circunscripto á un círculo, mas se acercará á su circunferencia: y si el número de lados se concibe infinito ó mayor qué cualquiera asignable, se confundirá su perímetro con dicha circunferencia del círculo, *el cual se podrá considerar como un polígono infinitángulo ó de una infinidad de lados.*

103 Las perpendiculares OT, OR &c. (fig. 49) tiradas desde el punto medio O ó centro de un polígono ABCDE sobre sus lados AB, BC &c. se llaman *radios rectos ó apotecmas* del polígono; y *radios oblicuos* á las OA, OB, OC &c. tiradas desde O á los ángulos, de suerte que los dividan por medio. Unas y otras son iguales entre sí cuando el polígono es regular.

Los oblicuos OA, OB &c. lo son porque dividiendo la perpendicular OT por medio á AB (51), tendrán los triángulos OAT, OTB, AT=

TB, OT comun, é iguales los ángulos ATO, OTB comprendidos; luego serán iguales (91), y AO=OB: lo cual se probará igualmente de OC, OD &c. Tambien son iguales los radios rectos, OT, OR &c. porque siendo en los triángulos OTB, OBR, TB=BR por ser mitades de los lados iguales AB, BC, el lado OB comun, y los ángulos comprendidos OBT, OBR iguales por ser mitades del ángulo B; serán iguales dichos triángulos (91), y OT=OR: lo que se demostrará igualmente de los demas.

104 De aquí se infiere que si se dividen por medio dos de los ángulos A, B de un polígono regular con los radios oblicuos AO, OB, y se traza desde el punto O de su concurso un círculo con el radio OA ó BO, quedará inscripto en él el polígono. Igualmente, si con el intervalo de uno de los radios rectos OT de un polígono se traza un círculo, quedará inscripto en el polígono ó este circunscripto al círculo.

105 *La suma de los ángulos interiores de todo polígono es tantas veces 180° como lados tiene ménos dos.* Lo demostrarémos del pentágono ABCDE (fig. 50) y lo mismo se podrá demostrar de cualquier otro. Si desde uno de sus ángulos D se tiran diagonales DA, DB á los ángulos opuestos A, B, quedará el polígono dividido en tres triángulos cuyos ángulos valen 3×180° (83): y como estos son los mismos que los del polígono, serán estos 3×180° ó (5—2)×180°, que son tantas veces 180° co-

mo lados tiene ménos dos. Lo mismo sucede en el polígono ABCDEF (fig. 47) no contando el ángulo entrante B por el lado esterior ABC, sino por el interior que comprehende los cuatro ángulos ABF, FBE, EBD y DBC.

106 Si dicha suma se divide en cualquier polígono regular por el número de sus ángulos ó lados, se tendrá el valor de cada ángulo. El del pentágono por egemplo, será $(5-2)\times180^\circ$ ó 540° divididos por 5, que da 108°: el del exàgono vale $4\times180^\circ$ ó 720° partidos por 6, que da 120°.

107 De consiguiente, para construir cualquier polígono v. gr. un exàgono, sobre una recta dada AB (fig. 48); formado en B el ángulo ABC igual al del polígono que es de 120°, se trazará un circulo desde el punto O en que concurren los dos radios oblicuos AO, OB con el intervalo de cualquiera de ellos; y pasando con un compás la distancia AB á los puntos C, D, E, F de su circunferencia á los que se tirarán BC, CD, DE, EF, FA, se habrá descrito el exàgono regular.

108 Si desde el centro O (fig. 51) de un polígono se tiran rectas OA, OB &c. á todos sus ángulos, quedará dividido en tantos triángulos como lados tiene, los cuales á causa de sus radios oblicuos iguales, serán isósceles é iguales si el polígono es regular. Con efecto, los ángulos de estos triángulos valen $5\times180^\circ$ (83), de donde si se quitan 360° ó $2\times180^\circ$

que valen los formados en O que no pertenecen al polígono, quedarán $(5-2)\times180°$, valor de sus ángulos interiores como lo digimos ya (105).

109 Cada ángulo de los formados en O, se llama *angulo del centro del polígono*, y su valor en el polígono regular es 360°, que valen siempre todos, partidos por el número de lados del polígono: en el exagono regular vale 360° partidos por 6 ó 60°: y como solamente 6×60, 4×90 y 3×120 componen 360°; solo con triángulos equiláteros en los que vale cada ángulo 60°, con cuadrados cuyo ángulo es de 90°, y con exàgonos podrá enlosarse un pavimento con figuras regulares.

110 En cualquiera de los triángulos, ABO, se ve (86) que el ángulo del centro AOB es suplemento de los otros dos ABO, OAB ó del angulo ABC del polígono á que equivalen: y como tambien es suplemento de ABC el ángulo esterior TBC, será este igual al ángulo del centro BOA. Lo mismo se probará de los demas esteriores RCD, XDE &c. que se forman alargando ácia una misma parte todos los lados del polígono: y de consiguiente la *suma de estos ángulos esteriores de cualquer polígono es siempre 360° como la de los del centro.*

111 Tanto estos como los esteriores disminuyen á proporcion que es mayor el número de lados y asi en el círculo, que se com-

pone de una infinidad de ellos, el ángulo esterior BTPD (fig. 23) es infinitamente pequeño como lo dejamos dicho: y por lo mismo el ángulo CTPD que forma el radio con la circunferencia, se puede considerar como recto.

112 Valiendo el ángulo del centro AOB (fig. 48) del exágono regular 360° partidos por 6 ó 60°, valdrán tambien 60° cada uno de los ángulos iguales OAB, OBA (83 y 87), y el triángulo AOB será equilátero (80): luego *el lado AB del exágono regular inscripto en un circulo, es igual al radio AO de dicho circulo*: de consiguiente, el diámetro será igual á $\frac{1}{3}$ del perimétro del exàgono, y la circunferencia mayor que el triplo del diámetro.

113 Luego *para inscribir un exágono regular en un circulo*; se llevará su radio con un compás seis veces sobre la circunferencia, señalando los puntos A, B, C &c. por los que se tirarán las cuerdas AB, BC &c. que formarán el exágono. Si se tiran despues las cuerdas BF, FD, DB, resultará el triángulo equilátero inscripto FDB; pues cada uno de dichos lados será cuerda de 120°. En él se tiene el radio oblicuo OB=OC duplo del radio recto OX, por ser OX=XC.

114 Como cada lado de un polígono inscripto en un círculo es cuerda de un arco igual á 360° partidos por el número de lados; si se pidiese *inscribir un polígono regular en un*

círculo dado: se buscará, dividiendo 360° por el número de lados, el arco que corresponde á cada uno, se tirará la cuerda á dicho arco, valiéndose del *Semicírculo* (24), y repitiéndolo con el compás por toda la circunferencia, quedará inscripto el polígono. Para trazar en este mismo caso el polígono circunscripto, se alargan los radios oblicuos OC, OD (fig. 49) hasta que encuentran la PH tangente al círculo en el punto Q, y PH será el lado del polígono circunscripto: los demas se determinan del mismo modo.

115 Si se tiran los dos diámetros AB, CD (fig. 52) perpendiculares el uno al otro, queda el círculo dividido en cuatro partes iguales, por las que se podrá dividir (54) en 8, 16, 32, 64 &c. partes. Con el triángulo equilátero ó con el exâgono regular se le podrá dividir en 3, 6, 12, 24, 48 &c. partes iguales.

Si se tira la cuerda AC de 90°, la AH lado del pentágono ó de 72°, y la AT de 60°, y se divide el arco TC por medio en O: será HO de 3°, que no se puede dividir ya geométricamente. Con efecto, AC—AT ó 90°—60°=30°: luego TO=15°, y como TH=AH—AT=72°—60°=12°; será HO=3°, con cuyo intervalo se dividirá el círculo en 120 partes iguales.

ARTÍCULO VIII

De las lineas proporcionales

116 Si en una línea ab (fig. 53), que forma con otra ob un ángulo cualquiera abo, se toman las partes iguales bn, nc, ch, hk &c. y por los puntos n, c, h, k, se tiran las paralelas nq, cs, hr, kp &c. cortarán en la bo las partes iguales bq, qs, sr, rp &c. pues tiradas las qz, sc, rl &c. paralelas á ab; los triángulos bnq, zqs que tienen $bn = nc = qz$ (98), el ángulo $nbq = zqs$ (44), y el $bnq = qzs$ (48), serán iguales (90), y el lado bq será igual á qs. De los triángulos qzs, scr, rlp &c. se sacará del mismo modo que son iguales qs, sr, rp &c.

117 Luego la parte bn es respecto de la bq, lo que nc respecto de qs, lo que ch respecto de sr &c. es decir, que $bn{:}bq{::}nc{:}qs{::}ch{:}sr{::}hk{:}rp{::}$ &c. de consiguiente será (180 t. I) ba suma de los antecedentes de dichas razones, á bo suma de los consecuentes, como un antecedente bn á su consecuente bq: como dos antecedentes bc á dos consecuentes bs; y como cualquier número de antecedentes nk á igual número de consecuentes qp: ó $ba{:}bo{::}bn{:}bq{::}bc{:}bs{::}nk{:}qp$ &c. de manera que si ba es los dos tercios de bo, tambien bn será los dos tercios de bq; bc de bs; nk de qp &c.

118 De aqui se infiere lo 1.º *que cualquiera recta hk* (fig. 54) *paralela á la base ad de un triángulo divide proporcionalmente los otros dos lados ab, bd*: esto es, será *bh:ha::bk:kd*; y *bh:ba::bk:bd*. Tambien será *bd:bk::da:kh*; pues tirando por *k* la *kp* paralela á *ab*, será por lo que acabamos de decir, *bd:bk::ad:ap=hk* (98).

119 2.º Al contrario, siempre que una recta *hk* divida proporcionalmente los lados *ba, ad* de un triángulo *abd*, será paralela á la base *bd*: porque como la paralela á la base, tirada por *k*, ha de cortar en *ba* una parte *bh* que tenga con *ha* la misma razon que *bk* con *kd* (118); la *hk* de la que esto se verifica, deberá ser paralela á *ad*.

120 3.º *Si desde un punto cualquiera b* (fig. 55), *se tiran á una recta de muchas otras ba, bc, bd, be; las cortará proporcionalmente una linea hk paralela á la base*, porque (118) en los triángulos *bac, bcd, bde*. la *hk* paralela á sus bases, corta los lados de suerte que *bh:ha::bq:qc::bp:pd::bk:ke*, y *bh:ba::bq:bc::bp:bd::bk:be*.

121 Siendo en el triángulo *bac* (118) *bq:bc::hq:ac*, y en el triángulo *bcd*, *bq:bc::qp:cd*: será *hq:ac::qp:cd*, ó *hq:qp::ac:cd*: del mismo modo se probará que *qp:pk::cd:de*: luego *hq:qp:pk::ac:cd:de*. Lo mismo se verifica cuando la paralela *ot* corta las *ab, bc, bd, be* alargadas; pues tomando en *ba*, *bn=bt*, y tirando

por n la nm paralela á ac; los triángulos bnx; bxs, bsm son iguales á btz, bzr, bro (90), por tener cada uno un lado y los ángulos adjacentes iguales: luego siendo $nx{:}xs{:}sm{::}ac{:}cd{:}de$; será tambien $tz{:}zr{:}ro{::}ac{:}cd{:}de$.

122 4.° *Si la linea bd* (fig. 56.) *divide el angulo b del triángulo abc en dos ángulos iguales x, o; cortará el lado opuesto ac en dos partes ad, dc proporcionales á los dos lados ab, bc*; esto es, será $ad{:}dc{::}ab{:}bc$: porque tirando por a la az paralela á db que encuentre en z la cb alargada; será el ángulo $o{=}y$ (44), y $x{=}t$ (45); y por ser $x{=}o$, será $t{=}y$, y (87) $ab{=}zb$. Como la paralela bd á az corta los lados ac, cz de suerte que $ad{:}dc{::}zb{:}bc$ (118); se tendrá poniendo por zb su igual ab, $ad{:}dc{::}ab{:}bc$. Al contrario, siendo los segmentos ad, dc proporcionales á los lados ab, bc, dividirá la bd al ángulo b por medio: porque siendo $ad{:}dc{::}ab{:}bc$, será $ad{:}dc{::}zb{:}bc$, y (119) la bd será paralela á az el ángulo $y{=}o$ (44), y $t{=}x$; luego siendo $t{=}y$, será $x{=}o$.

123 5.° *Para encontrar una cuarta proporcional á las tres lineas dadas m, n, o*, (fig. 57); tiradas dos lineas bf, ba que formen un ángulo cualquiera abf, se tomará con el compás sobre bf, br igual á la linea dada m, y la bg del tamaño de la n; córtese despues en ba, la bp igual á la linea o, tírese por p y r la pr, y trazando por el punto g la gt paralela á pr; será bt la cuarta propor-

cional á m, n, o: pues en el triángulo btg se tiene (118) $br:bg::bp:bt$, ó $m:n::o:bt$.

124 *Una tercera proporcional á dos lineas dadas* m, n, se encuentra tomando en bf, br y bg iguales á m, n, y sobre ba, $bp=n$, tirando rp, y por g su paralela gt; pues siendo $br:bg::bp:bt$, será $m:n::n:bt$ ó $\div m:n:bt$.

125 6.º *Para tirar por un punto dado* f (fig. 58) *una linea* fg, *que se encamine en derechura al punto del concurso de las dos* ab, dc, cuando este punto está demasiado distante para poderse determinar; desde dos puntos cualesquiera de la ab se tirarán dos paralelas ad, bc que rematen en la dc, desde el punto a se tirará á f la af, y á esta la paralela indefinida bl; tómese en ella la parte bg cuarta proporcional á las tres lineas ad, bc, af; y tirando por f y g la fg, será la linea que se pide: porque siendo $ad:bc::af:bg$; si se tiran otras dos paralelas cualesquiera mn, no, será tambien $ad:af::mn:no$: luego cuando mn sea cero, lo será tambien, no; esto es; cuando la ab se junte con dc, se juntará tambien la fg.

126 7.º Ultimamente, *si se pidiese dividir una recta ab* (fig. 59) *en cualesquiera partes*, v. g. en ocho iguales: se tomarán en la línea bf que forma con ab un ángulo cualquiera abf, comenzando desde b y con cualquier intervalo de compás bd, las ocho partes iguales bd, dx &c. desde c donde conclu-

yen, se tirara la recta *ca*, y trazando despues por los puntos *d*, *x*, *r* &c. paralelas á *ca*; cortarán en *ab* las ocho partes iguales: pues siendo *bc:ba::bd:be*; *dx:eh::xr:hp* &c. serán *bc*, *eh*, *hp* octavas partes de *ab*, como *bd*, *dx*, *xr* &c. lo son de *bc*.

127 *Si se hubiera de haber dividido la ab en dos partes que tuviesen una razon cualquiera*, como 3 : 5; tomada la suma 3+5=8 de partes iguales sobre *bc*, y tirada la *ca*, se tiraría por la tercera division la *pr* paralela á *ac*; pues siendo *br:rc::bp:pa* y *br:rc*::3:5, será *bp:pa*::3:5.

128 En esta doctrina estriba el método de construir las *Escalas*, instrumento que representa en partes pequeñas las medidas de leguas, toesas, varas &c. tomadas en el terreno. Si se toman por eg., á arbitrio en una linea cualquiera *as* (fig. 60) diez partes iguales *ad*, *dc*, *ce* &c. señaladas con sus números correspondientes 10, 20, 30 &c. y la primera se divide en sus diez unidades que representen varas, pies &c. se tendrá una escala *as* de 100 partes iguales.

Para tomar en ella cualquier número 65, de partes; se pondrá en el número 60 una de las puntas del compás y la otra en el 5, y este interválo será de 65 partes. Igualmente para averiguar el número de partes de la escala que tiene una línea *nm*; tomando su longitud con el compás, poniendo la punta en una de las

decenas como 40, y viendo adónde llega la otra, si es á 5 tendrá 45.

129 Para construir una escala mas exacta y universal; tirada en el punto A de una linea AG indefinida, la perpendicular AB de longitud arbitraria (fig. 61), y por B la BP paralela á AG, se dividirá una porcion AH y su igual BD en diez partes iguales; que se señalarán con los números 10, 20, 30 &c. se tirarán despues trasversales desde 10 á D, de 20 á 10, de 30 á 20. Repitiendo tambien en la AG diez veces la porcion AH, se levantarán en los puntos F, G &c. las perpendiculares FI, GP &c. á las que se pondrán los números 100, 200, 300 &c. Se dividirá por último la AB en diez partes iguales 1, 2, 3, &c. y tirando por estos puntos paralelas; quedará construida la escala de mil partes, en la que los intervalos HF, FG &c. son de cien partes: D10, 10 20 son de diez, cuyas unidades son *tp*, *on* &c.; pues siendo los triángulos D10H, D*tp*, D*on*, D*rs* &c. semejantes, será DH de diez partes, á H10 de otras diez; como D*s* de cinco, á *sr* de otras cinco; como D*n* de dos, á O*n* de otras dos....

130 Si se pidiesen 265 partes de esta escala; supuesto que HG ó *s*Q vale 200, D60 ó T*r* 60, y *rs* cinco; será la distancia TQ de 265 partes. Asimismo sabremos cuántas partes contiene de la escala cualquiera recta; tomando su intervalo con el compás, acomodando

una de sus puntas sobre alguna de las lineas DH, FI, GP &c. y viendo despues á qué trasversal de la BD corresponde.

ARTICULO IX

De la semejanza de los triángulos, y de las lineas proporcionales en el circulo

131 Dos triángulos *atr*, *bcd* (fig. 62) son semejantes, si los tres ángulos del uno son iguales á los del otro, esto es, $a=b$, $t=d$, $r=c$. Cuando son iguales los dos ángulos del uno á los del otro, lo son los tres (86): y en los triángulos rectángulos basta la igualdad de uno de los agudos; así como en los isósceles la de cualquiera de los tres. De consiguiente, si dada una linea *dc* se pidiese trazar sobre ella un triángulo semejante á *atr*; se formarán en *d* y *c* dos ángulos iguales á *t* y *r*, y será el triángulo *bdc* semejante á *atr*.

Si en un triángulo *atr* se tiran paralelas *mn*, *pq* &c. á la base; resultarán los triángulos *amn*, *apq*, *atr* semejantes: pues tienen comun el ángulo *a*, y los otros dos iguales por las paralelas. Lo mismo sucede cuando los lados del un triángulo *ont* (fig. 63) son paralelos á los del otro *abc*; pues deben ser equiángulos: ó cuando son perpendiculares los lados unos á otros, como los de *emd*; pues dando á

este la cuarta parte de una vuelta, quedarán sus tres lados paralelos á los de abc.

132 *Dos triángulos semejantes cualesquiera* atr, bdc (fig. 62), *tienen proporcionales sus lados homologos* ó los opuestos á iguales ángulos; $at:bd::ar:bc::tr:dc$. Porque si se toma en el lado at, $am=bd$, y por m se tira la mn paralela á la base tr: tendrán los triángulos amn, bdc el lado $am=bd$, y por ser semejantes atr, bdc, los angulos $a=b$, y $m=t=d$; luego serán iguales (90), y $an=bc$, $mn=dc$; y como por razon de las paralelas mn, tr se tiene (118) $at:am::ar:an::tr:mn$; sera tambien $at:bd::ar:bc::tr:dc$, poniendo por am, an, mn, sus iguales bd, bc, dc.

133 Al contrario, *si los lados homólogos de dos triángulos* atr, bdc *son proporcionales* $at:bd::ar:bc::tr:dc$; *dichos triángulos serán semejantes*: porque tomando $am=bd$, y tirando mn paralela á tr; será (118) $at:am::ar:an::tr:mn$: y como por suposicion $at:bd::ar:bc::tr:dc$; será $am:bd::an:bc::mn:dc$: los términos de la primera razon am, bd son iguales; con que lo serán tambien an y bc, mn y dc; y los triángulos amn, bdc serán iguales (89), luego siendo el triángulo amn semejante á atr lo deberá ser tambien bdc.

134 *Dos triangulos* atr, bdc *con un ángulo* $a=b$, *y proporcionales los lados que le forman* $at:bd::ar:bc$, *son semejantes*. Tomando $am=bd$, y tirando mn paralela á tr, re-

sulta $at:am::ar:an$: y como se supone $at:bd::ar:bc$, será $am:bd::an:bc$: y siendo $am=bd$, será $an=bc$, y los triángulos amn, bdc iguales (91): luego siendo amn semejante á atr, lo será tambien bdc.

135 *Si desde el ángulo recto b* (fig. 64) *de un triángulo rectángulo abc, se baja la perpendicular bd; resultan dos triángulos abd, bdc semejantes á abc, y de consiguiente entre sí:* pues cada uno de ellos tiene con abc un ángulo comun, y un ángulo recto en d; luego son semejantes con abc (131), y de consiguiente lo serán entre sí.

136 De la semjanza de los triángulos abd bdc se saca (132) $ad:bd::bd:dc$ ó $\div ad \cdot bd \cdot dc$, es decir, *que la perpendicular bd bajada del ángulo recto de un triángulo rectángulo sobre la hipotenusa, es media proporcional entre sus segmentos ad, dc.* Y como todo ángulo inscripto abc (fig. 65) formado sobre el diámetro ac de un círculo es recto (69), será tambien *media proporcional entre los segmentos ad, dc del diámetro la perpendicular bd bajada sobre él desde cualquier punto de la circunferencia del círculo*, esto es, será $\div ad \cdot bd \cdot dc$, y de consiguiente (197 *t.* I) $bd^2=ad \times dc$.

137 Y así *para encontrar una media proporcional entre dos líneas dadas m, n*: tomando $ad=m$ y $dc=n$, se juntarán ambas de suerte que formen una sola recta ac, que se di-

vidirá por medio en *o*: desde *o* con el intervalo *ao* se trazará el semicírculo *abhc*, y la perpendicular *bd* levantada en el punto *d* del concurso de las dos líneas, será media proporcional entre *ad* y *dc*, ó entre *m* y *n* (136).

138 De los triangulos *abd*, *abc* semejantes (135) (fig. 64). se saca *ac:ab::ab:ad* (132), y de los *abc*, *bdc* tambien semejantes *ac:bc::bc:dc*; es decir, *cada lado ab, bc de los que forman el ángulo recto, es medio proporcional entre la hipotenusa y el segmento correspondiente de la base*: y por lo mismo *cualquiera cuerda ab* (fig. 65) *tirada desde el estremo del diametro ac, es media proporcional entre el diametro y el segmento ad* que forma la perpendicular bajada desde *b* sobre *ac*; pues tirada la *bc*, el triángulo *abc* es rectángulo en *b*.

139 Luego *si dadas t, r, se pidiese una media proporcional entre ellas*; se trazaría sobre $ac=t$ un semicírculo, se tomaria $ad=r$, y levantando en *d* la *bd* perpendicular á *ac*; sería media proporcional la cuerda *ab* tirada de *a* á *b*: pues en el triángulo rectángulo *abc*, se tiene *ac:ab::ab:ad* ó *t:ab::ab:r*.

140 Si despues de haber trazado sobre la hipotenusa *ac* (fig. 66) del triángulo rectángulo *abc* un semicírculo, se alargan *ab*, *ac*, y se levanta en *c* la *ce* perpendicular á *ac*, en *e* la *ef* perpendicular á *am*, y en *g*, *h*, *k*, *l*, *m*, las perpendiculares á dichas lineas; se tendrá

una série de lineas proporcionales ÷ $ad:ab:ac:ae:af:ag$ &c. en los triángulos rectángulo semejantes abd, abc, ace, acf, afg &c.

141 De las dos proporciones ÷ $ac:ab:ad$, ÷ $ac:bc:dc$, se saca (197 *t.* I.) $(ab)^2 = ac \times ad$, $(bc)^2 = ac \times dc$: será pues, sumando ambas ecuaciones, $(ab)^2 + (bc)^2 = ac \times ad + ac \times dc$, ó $(ab)^2 + (bc)^2 = ac(ad + dc)$, ó últimamente $(ab)^2 + (bc)^2 = ac \times ac = (ac)^2$, que es decir; *el cuadrado* $(ac)^2$, *de la hipotenusa de un triángulo rectangulo es igual á la suma de los cuadrados* $(ab)^2 + (bc)^2$ *de los otros dos lados.*

142 *Las partes de dos cuerdas* ad, bc, (fig. 67) *que se cortan en un circulo, son recíprocamente proporcionales;* esto es, ae parte de la 1.ª es á eb parte de la 2.ª como ec parte de esta 2.ª á ed parte de la 1.ª: porque tirando las ab y cd, resultan semejantes los triángulos aeb, ced; por tener los ángulos en e iguales (22), y $c = a$ (68): luego (132) $ae:eb::ec:ed$. Si entre dos paralelas ab, cd se tiran como quiera las ad, bc que se corten, son tambien recíprocamente proporcionales sus partes por la misma razon.

143 *Dos secantes* ab, bc (fig. 68) *tirados á un circulo desde un punto* b, *son recíprocamente proporcionales con las partes esteriores* br, bd; de suerte que $bc:ba::br:bd$: porque si se tiran ad, y rc, los triángulos brc, bad que tienen ademas del ángulo b comun,

a y c iguales (68), serán semejantes: luego (132) $br:bd::bc:ba$.

144 *Si se tiran á un círculo desde un punto b una tangente bp y una secante ba, la tangente es media proporcional entre la secante y el segmento esterno*, ó $ba:bp::bp:br$. Tiradas las pa, pr, los triángulos apb, pbr son semejantes: pues tienen el ángulo b comun y $a=p$ (66 y 67): luego $ab:bp::bp:br$, y $(bp)^2=ab\times br$ (197 *t.* I) Del mismo modo se verifica que $ab:bo::bo:br$, ó que $(bo)^2=ab\times br$; será pues, $(bp)^2=(bo)^2$, y $bp=bo$, es decir, serán iguales las dos tangentes tiradas á un círculo desde cualquier punto fuera de él.

145 Por esta proposicion 1.° *se encuentra una media proporcional entre m* y *n* (fig. 69): tomando una linea $bt=m$ y $br=n$, trazando sobre el diámetro tr un círculo, y tirando á él desde b la tangente ba, que será media proporcional entre bt y br, ó entre m y n.

146 2.° Se puede dividir una linea ab en *media y estrema razon*: así se llama la division de ab en dos partes ad, db tales, que la mayor db sea media proporcional entre la menor ad y toda la ab. Para esto se levanta en el estremo a la perpendicular ac igual á la mitad de ab, con el radio ca se traza un círculo, por b y c se tira bct, y tomando $bd=br$, quedará la ab dividida en d, de suerte que $ad:bd::bd:ab$. Porque siendo (144) $bt:ba::ba:br$ ó (198 *t.* I) $bt-ba:ba::ba-br:br$; como

$bt-ba=br=bd$, (por ser $bt-ba=bt-2ac=bt-tr$), $ba-br=ba-bd=ad$; se tendrá $bd:ba::ad:bd$, ó $ba:bd::bd:ad$. Cuando la parte rt de la secante es igual á la tangente ab, queda la secante dividida en media y estrema razon en r; pues siendo (144) $bt:ba::ba:br$; será en tal caso $bt:rt::rt:rb$.

147 Si en el triángulo isósceles abc (fig. 70) cuyos ángulos b, c sea cada uno duplo de a ó de 72°, se divide el ángulo b por medio con la bt, quedará la ac dividida en media y estrema razon en t. Porque siendo semejantes los triángulos abc, tbc, por tener el ángulo c comun, y $a=tbc=36°$; será $ac:cb::cb:ct$, ó $ac:at::at:ct$, pues $cb=bt=at$ por la igualdad de los ángulos (87). Luego si bc es lado del decágono inscripto en un círculo, será el ángulo $a=36°$ (109), b y c de 72°; y de consiguiente, tirando bt, será $bc=at$, y *el lado del decágono inscripto en un círculo será igual al segmento mayor del radio dividido en media y estrema razon.*

ARTICULO X

De la semejanza de las demas figuras

148 Tratemos ya de las demas figuras, que para ser *semejantes* deben tener todas sus ángulos iguales, y proporcionales todos sus lados ó líneas *homólogas*; es decir, las opuestas á

iguales ángulos, ó situadas semejantemente en ellas. Serán pues, semejantes los pentágonos ABCDE, *abcde* (fig. 71), si los ángulos $A=a$, $B=b$, $C=c$, $D=d$, $E=e$, y los lados $AB:ab::BC:bc::CD:cd::DE:de$.

149 »Si de dos ángulos homólogos C, *c*, »de dos figuras semejantes ABCDE, *abcde*, se »tiran á los demas las diagonales CA, CE; *ca*, »*ce*; los triángulos en que queda dividida la »una figura, serán semejantes á los correspon»dientes de la otra." Pues los triángulos ABC, *abc* y lo mismo se prueba de DEC, *dec*, ademas de los ángulos B, *b* iguales, tienen proporcionales los lados AB, BC; *ab*, *bc* que los forman (148); luego serán semejantes (134). Será pues el ángulo $n=o$, y (132) $AB:ab::AC:ac$: y como $AB:ab::AE:ae$, será $AC:ac::AE:ae$, es decir, proporcionales los lados AC, AE; *ac*, *ae*, de los triángulos AEC, *aec*, ademas de ser iguales los ángulos m y z que forman; pues si del ángulo $A=a$, se quita $n=o$, quedará $m=z$; luego tambien son semejantes los triángulos ACE, *ace*, y de consiguiente todos los de las figuras.

150 Por un razonamiento contrario se prueba igualmente que si los triángulos en que una figura se divide, son semejantes á los correspondientes en que se divide otra, son semejantes las figuras. Y así para construir una figura semejante á otra ABCDE dada, y que tenga á *bc* por lado homólogo de BC; se lleva-

rá bc desde C á b', se tirará por b' la $b'a'$ paralela á AB que encontrará á AC en a'; por a' se trazará la $a'c'$ paralela á AE, y por e' la $e'd'$ paralela á ED; y resultará la figura $Cd'e'ab'$ semejante á ABCDE. Tambien pudo haberse trazado sobre el lado bc dado, el triángulo abc semejante á ABC (131), sobre ac, el triángulo ace semejante á ACE, y sobre ec, ecd semejante á ECD, y se hubiera tenido la figura $abcde$ semejante á ABCDE.

151 *Para copiar una figura cualquiera* ABCDEF (fig. 72); 1.º se podrá tirar la diagonal BE, y bajando á ella desde todos los ángulos las perpendiculares AO, FS, DR, CP, se verá cuántas partes tienen de una escala la BE, dichas perpendiculares, y sus respectivas distancias BO, OS, SP &c. Tómese despues una línea be del mismo número de partes que BE, y determinadas por uno y otro lado las distancias bo, os &c. de las perpendiculares, dando á cada una el número de partes que les corresponde, quedarán señalados los puntos o, s, p, r; en los que levantando las perpendiculares oa, sf &c. del mismo tamaño que OA, SF &c. se tendrán los puntos b, a, f, d &c. mas principales de la figura: los demas se pueden dibujar á ojo; advirtiendo que si no basta la BE para determinar dichos puntos por ser muchos, ó por ser grande su distancia respectiva, se tirará otra base perpendicular á BE por cuyo medio se determinarán.

152 2.º Tambien se pudiera haber copiado aplicando el papel ó lienzo en que está la figura á otro, y picando despues con un alfiler sutil los puntos mas principales por los cuales se podrán determinar los demas.

153 3.º Si despues de haber picado con un alfiler los puntos de la figura, se aplica sobre otro el papel picado, y se repasan todos ellos con un *cisquero*, que es un lienzo atado por sus puntas con carbon molido dentro; quedarán señalados dichos puntos en el papel que se renovarán con tinta ú otro color permanente.

154 4.º Aplíquese sobre un papel, otro dado de cualquier color que se quite facilmente como el de cualquier género de lapiz: póngase sobre ambos la figura que se ha de copiar, y repasando con una punta roma todos los contornos y puntos principales, quedará calcada la figura en el papel.

155 5.º Si se aplica á un cristal la figura dada, en sitio donde le dé bastante luz por atras, y se pone sobre ella un papel; se traslucirá por él toda la figura, y será facil copiar todos sus puntos y contornos.

156 6.º Ultimamente, cuando se trata en especial de la copia de un cuadro ó mapa, se encierra la figura en un cuadrado ó rectángulo ABCD (fig. F), se dividen los dos lados AB, AD en partes iguales, y se tiran por ellas líneas paralelas que dividirán el rec-

tángulo que se llama *cuadrícula*, en cuadrados pequeños: cópiese cada cuadrado correspondiente en otro rectángulo que se forma igual en un papel ó lienzo, dividido en igual número de partes, y con las mismas paralelas, y se tendrá la copia de la figura.

157 Si en lugar de figuras iguales se quisiese una copia semejante que fuese la mitad, el tercio, cuarto..... del original, se formará una cuadrícula que tenga con la dada la razon que se desea; y por el primer método se tomarán sus lineas con el número de partes de una escala que tenga la misma razon que han de tener las figuras.

158 En las proposiciones que hemos demostrado sobre las figuras semejantes se fundan las prácticas de arquitectos, ingenieros y marinos en las diferentes operaciones de su profesion. Aquí nos toca solo considerar este asunto en general, prescindiendo de las particulares aplicaciones que deben hacerse y enseñarse en los elementos de cada una de estas profesiones.

Para levantar pues el plano de un terreno, ó trazar otro semejante en el papel con las distancias respectivas que tienen los puntos ú obgetos principales que en él haya: sirven diferentes instrumentos como el *Grafómetro*, *la Plancheta*, *la Brújula* &c. Hablarémos ahora de estos dos últimos con relacion á los terrenos acesibles por todas sus partes, reservando para despues el uso del gra-

fómetro en los sitios en parte ó del todo inaccesibles.

La *Plancheta* es una tabla IHMNO (fig. 73) de tres pies de largo, y como dos y medio de ancho, colocada sobre un pie como el grafómetro (155): sobre ella se estiende un papel que se afianza con un bastidor que coge el perímetro de la tabla; y para dirigir por ella visuales á los objetos, se usa de una *alidada* LT con dos pínulas en sus estremos, ó de un anteojo si los objetos están á mucha distancia.

159 Para levantar un plano con este instrumento, se mide una base SR desde cuyos estremos S, R se pueden ver los mas de los obgetos que se han de figurar: se pone la plancheta en S y un piquete en R, y dirigiendo la alidada de manera que por sus pínulas se vea R; se tirará en el papel una base EF, dándole tantas partes de una escala, como varas ó pies tenga SR. Diríjase despues la alidada fijo uno de sus estremos en E, á todos los objetos A, B, C &c. del terreno, y por cada direccion se tirará en el papel una linea indefinida. Pásese despues el instrumento á R, dejando un piquete en S, y alineando con él la *ef*, diríjanse visuales á los objetos A, B, C &c. observados, las cuales señaladas en el papel, cortarán las primeras en los puntos *a*, *b*, *c* &c. que determinarán la posicion de los del terreno, á causa de los trián-

gulos semejantes SAR, SBR, SCR &c. *efa*, *efb*, *cfc* &c. que resultan.

160 El poco aparato que requiere el uso de este instrumento, le hace apreciable para determinar los puntos menos principales de un plan forjado ya por un método mas exacto. Si se quisiere por egemplo, añadir al anterior *efcba* un punto R omitido; se plantara sobre él la plancheta, se dirigirá la alidada por los puntos A, *a*, y despues por B, *b*; y el concurso *f* de las lineas A*a*, B*b* tiradas en cada direccion, señalará la situacion de R: en prueba de lo cual la linea tirada por C*c* pasará tambien por *f*. Por lo demas, suelen ser considerables los errores que pueden resultar en el uso de la plancheta, ya por ser muy agudos los ángulos que sobre ella se forman, ya por estar el papel espuesto á moverse. Ademas de esto, cuando el mal temporal interrumpe la operacion, hay que volverla á comenzar si se ha de hacer con exactitud.

161 La *Brújula* es un instrumento de marfil, madera ú otra materia sólida (fig. 74) de dos hasta seis pulgadas de diámetro, cuya parte interior es un círculo con dos diámetros que se cortan á ángulos rectos. El estremo de uno de ellos tiene una flor de lís con que se señala el *Norte*, uno de los cuatro puntos *cardinales* del mundo: desde él empieza la division del círculo en sus 360° ácia la derecha del que mira al cielo con la cara al *Norte*, el cual tiene

el *Sur* á las espaldas, el *Oriente* á la derecha y el *Poniente* á la izquierda: así se llaman los otros tres puntos del mundo. En el centro del círculo sobre un eje de cobre puntiagudo se coloca una aguja de acero tocada al iman, muy en equilibrio para que pueda dar vueltas con facilidad; y todo se tapa con un cristal redondo que encaja en un rebajo hecho al rededor del círculo para impedir que el aire mueva la aguja.

162 Como esta tiene la virtud comunicada del iman, de dirigir uno de sus estremos ácia el Norte y otro ácia el Sur; se cuida de colocar tanto en el grafómetro como en la plancheta una brújula para dar por medio de ella á los objetos la misma situacion en el papel que tienen en el terreno con relacion á los puntos cardinales del mundo. Con este fin se coloca de manera que la linea *Norte-Sur* quede paralela con el diámetro del grafómetro; pues siendo la base comun de todos los triángulos que se observan, paralela á dicho diámetro; con solo dirijir paralela á la aguja la linea de *fc'*, que es la que pasa por medio de la alidada; se sabrá con poca diferencia la situacion de los obgetos respecto de dichos puntos cardinales.

163 Dije con poca diferencia, porque la aguja segun el tiempo y los diferentes lugares, se aparta mas ó ménos de la direccion del Norte. Para saber en cuántos grados se separa, ó

el *angulo de la declinacion* de la aguja con la linea norte-sur, hay que tirar esta linea en el terreno. Lo que se puede hacer trazando desde un punto dos lineas de treinta á cuarenta estadales, una ácia el sol naciente y otra cuando se pone, y dividiendo por medio el ángulo que formen las dos, con una linea, que será la *meridiana* ó norte-sur. Si á esta meridiana se aplica una de las bases AB de la brújula, quedará con ella paralela su linea norte-sur; y el ángulo que con ella forme la aguja, restado de 360°, dará el de la declinacion.

164 Con ningun instrumento se levantan mas facilmente los planos que con la brújula; pero ninguno ocasiona mayores equivocaciones, ya sea por tomarse muy agudos los ángulos por la pequeñez de las agujas, ya sea por no haberse acaso apartado lo bastante de alguna mina de hierro en el terreno; y en casa, de utensilios de hierro, puntas de compás, ó de otra brújula. Por eso suele servir solamente para determinar *el pormenor* de un plano: como el curso de un rio, la direccion de un camino, de una costa, de una rada, el circuito de una laguna, bosque, ó de cualquier pais.

165 Para cualquiera de estos casos se plantarán piquetes A, B, C, D, E (fig. 75) en todos los recodos mas reparables, se coloca á la brújula en A, y suponiendo que sea AH la direccion de la aguja: se medirá la AB, y se verá qué número de grados tiene el ángulo

HAB. Puesto el instrumento en B, se medirá igualmente la BC, y el ángulo HBC, repitiendo esto mismo en cada recodo. Se tomará despues en el papel un punto *a*, y tirando á arbitrio la *ah* que represente la direccion de la aguja; se formará con el *semicirculo* un ángulo *hab*=HAB, dando á *ab* tantas partes de una escala como varas ó pies tuvo AB: se tirará despues por *b* la *hb* paralela á *ab*, y se hará el ángulo *hbc*=HBC, dando á *bc* tantas partes como medidas tuvo BC, practíquese lo mismo en los demas puntos, y se habrá levantado el plan propuesto.

106 *Los perímetros de dos figuras semejantes* ABCDE, *abcde* (fig. 71) *sean regulares ó no, tienen entre sí la misma razon que sus lados, porciones, diagonales y demas líneas homólogas.* Porque siendo (148) AB:*ab*:: BC:*bc*::CD:*cd*::DE:*de*, será (199 *t.* I) AB+BC+CD+DE ó ABCDE perímetro de la una figura y suma de los antecedentes, á *abcde* perímetro de la otra y suma de los consecuentes: como un antecedente AB á su consecuente *ab*; como cualquier número de antecedentes AB+BC+CD ó ABCD, á igual número de consecuentes *abcd*. Y como AB:*ab*::AC:*ac*::CE: *ce* &c. (149), serán tambien los lados y perímetros proporcionales á las diagonales, y en los polígonos regulares á los radios rectos, oblicuos &c. de manera que la figura de un perímetro duplo del de otra tendrá lados, diagonales,

radios duplos; triplos si fuese triplo el perímetro &c.

167 Todas estas proposiciones tienen lugar en el círculo, polígono infinitángulo (102), que podemos imaginar dividido en infinitos triángulos con radios tirados á todos sus puntos, que serán las bases y lados infinitamente pequeños del polígono. De consiguiente, *las circunferencias de los círculos son entre sí como sus radios, diámetros, cuerdas y arcos semejantes.* De manera que dado el diámetro y circunferencia de un círculo, y el diámetro de otro, si se nos pidiese su circunferencia; diríamos, *el primer diámetro es á su circunferencia, como el segundo diámetro á la circunferencia que se busca*, que sería el 4.° término de la proporcion.

Pero hasta ahora está por averiguar la circunferencia ó proporcion de la línea recta que exâctamente corresponde á cierto diámetro, ó la razon del diámetro á la circunferencia; teniéndose ya casi por imposible averiguar la que se llama (180) *cuadratura del círculo.* Sinembargo, son suficientísimas para la practica las razones 7:22 que tiene el diámetro á la circunferencia segun *Arquimedes*, en la que sale un solo pie de ménos en un círculo de 800 pies; 113:355 que halló *Mecio*, y que da un pie de falta en una circunferencia de 1000000, y 1:3,1415926535897932 &c. hasta ciento veinte y siete notas decimales.

168 Si se diese un diámetro de 16 varas, hallaríamos su circunferencia de $50\frac{2}{7}$ *v.* diciendo, 7:22::16:$50\frac{2}{7}$ *v.* y al contrario; el diámetro 16 *v.* de una circunferencia que tiene $50\frac{2}{7}$ *v.* se encuentra por la proporcion 22:7:: $50\frac{2}{7}$*v.*:16. Ultimamente, si dado el diámetro de 20 *v.* se pidiese la longitud de un arco de $32°$ $40'$, se buscará primero la circunferencia que es de $62\frac{6}{7}$ *v.* y despues se dirá, *si toda la circunferencia* ó $360°$ *tiene* $62\frac{6}{7}$ *v. ¿cuántas tendrá* $32° 40'$? Sáquese el último término, y saldrán $5\frac{19}{27}$ *varas.*

SECCION II

ARTÍCULO I

De las Superficies y Planos

169 El segundo género de estension en longitud y latitud que se llama *area* ó *superficie*, es el espacio que encierran las lineas: y segun sean estas rectas ó curvas, será *rectilinea*, *curvilinea* ó *mistilinea* la superficie. Tambien se llama *plana* la superficie perfectamente lisa sin hoyos ni eminencias, como la del cristal que es de la que vamos á tratar: y *curva* aquella cuyos puntos no estan igualmente altos y bajos: esta será *convexa* ó *cóncava* como el esterior é interior de un caldero.

170 Dicha superficie plana que se considera formada de infinidad de lineas que llenan todo su espacio (1), se llama *plano* cuando se imagina separada de los cuerpos; y como no tiene grueso, cavidades ni prominencias, *cualquiera recta que le toque en dos puntos, le tocará en todos*; pues si no, tendria una parte en el plano y otra mas elevada; y no seria recta. Por lo mismo, *un plano puesto sobre otro le toca en todos sus puntos, y forma con él un solo plano*; pues se tocan precisamente todas las rectas que los forman.

171 *Tres puntos que no están en linea recta, determinan la situacion de un plano;* porque si dos planos pudieran tener tres puntos comunes, ó los tendrian todos y formarian un solo plano, ó tendria uno de ellos alguna parte elevada sobre el otro plano, lo que no puede ser (169). De consiguiente, tres puntos que no esten en linea recta, no pueden ser comunes á dos planos.

172 De aquí se infiere que por tres puntos cualesquiera v. gr. los de un triángulo, se podrá hacer pasar un plano; y de consiguiente dos rectas BD, BC (fig. 76) que se corten, estarán en un mismo plano, determinado por los tres puntos D, B, C; y lo mismo dos paralelas TH, AB.

173 *Una recta AB perpendicular á un plano* MNOP, *es tambien perpendicular a todas las lineas puestas en el mismo plano que*

pasan por el punto B *de la perpendicular*: pues si no lo fuera, se inclinaría ácia algun lado del plano, contra el supuesto de ser perpendicular. De consiguiente, *dos lineas* TH, AB *perpendiculares á un plano son paralelas entre sí*: pues uniéndolas con HB son perpendiculares á la HB (43).

174 *Desde un punto tomado en un plano ó fuera de él, no se puede tirar mas que una perpendicular á dicho plano*; porque si se pudieran tirar dos desde un mismo punto, se podrian tirar dos perpendiculares desde un punto á una linea recta, lo cual es imposible (33).

175 *Si dos planos* ENMA, BOPS (fig. 77) *se cortan, la comun seccion es una linea recta*: porque si tomamos dos puntos en dicha seccion, la recta que pase por ellos, ha de estar toda en cada uno de los planos (3): luego será la comun seccion, y será linea recta.

176 *Si dos planos* EMNA, BOPS *son perpendiculares al plano* RQ, *su comun seccion* DC *será tambien perpendicular al plano*: pues si del punto C se levanta una perpendicular al plano RQ, deberá hallarse toda en cada uno de los planos EMNA, BOPS; luego será la comun seccion.

177 *La inclinacion de dos planos* AN BP *se mide por el ángulo* ACB *que forman dos lineas* AC, BC *perpendiculares á la co-*

mun seccion DC, *tiradas una en el plano* AN, *y otra en el plano* BP: pues si imaginamos que sobrepuesto el punto A á B, se aparta despues el plano AN moviéndose al rededor del ege DC; trazará B hasta volver á su lugar el arco AB: luego medirá la inclinacion de los planos el ángulo ACB, cuya medida es AB.

178 Luego en la interseccion y encuentro de dos ó mas planos se verifica cuanto dejamos demostrado en la interseccion y encuentro de dos ó mas lineas (18, 22 *y sig.* 27 *y sig.* 43 *hasta* 48) que escusamos repetir aquí.

179 Los planos son paralelos cuando tienen una misma direccion, y de consiguiente cuando distan igualmente por todas partes; y así *si un plano corta dos ó muchos planos paralelos, las comunes secciones son tambien paralelas*; pues si no, alargándolas se vendrian á juntar, y de consiguiente los planos, contra lo supuesto de ser paralelos.

ARTÍCULO II

Medida de las superficies

180 Las superficies se miden con cuadrados, por ser la figura mas sencilla: y asi *cuadrar ó medir una superficie* ABDC (fig. 78), es averiguar las veces que en ella cabe otra superficie cuadrada y conocida *abdc* que se to-

ma por la unidad. Y como ABDC se puede concebir formada (1) por la recta DC que se mueve paralelamente á sí misma lo largo de BD, dejando rastro tras sí de su movimiento; á cada paso D*b* que ande, igual al lado *db* del cuadrado *abdc* que se toma por la unidad, formará tantos cuadrados iguales á *abdc*, cuantas veces dicho lado D*b* ó D*c* quepa en la linea D*c*, que son cuatro. Luego dicha superficie contendrá tantas veces cuatro cuadrados iguales á *abdc*, como veces su lado *ab* ó D*b* quepa en la base BD, esto es, el producto del número de veces que el lado del cuadrado cabe en la base y en la altura. Esto espresaremos mas sencillamente en lo sucesivo diciendo *que la superficie de un paralelogramo rectángulo es el producto de la base por la altura*, bien que con impropiedad; pues ni una linea puede multiplicarse por otra no siendo número abstracto (38 *t.* I), y si se pudiera multiplicar, resultaria una linea y no una superficie.

181 Luego 1.° *la superficie de un cuadrado es el producto de la base ó de la altura por sí*: y la de un paralelogramo cualquiera BCDF (fig. 45) *es el producto de su base* BC *por su altura* DT ó AB; esto es, BC×AB: porque BCDF es igual á ABCE (97), y este tiene por superficie á BC×AB (180).

182 2.° *La superficie de cualquier triángulo*, como mitad que es del paralelogramo de igual base y altura que él (96), *es la mitad*

del producto de su base por su altura, ó el producto de una de las dos por la mitad de la otra.

183 *La superficie de un trapecio abce* (fig. 79) *es el producto de su altura cd por la mitad de la suma de sus bases paralelas bc, ae*: porque con la diagonal ac queda dividido en los dos triángulos abc, ace, cuyas superficies son (182), $\frac{1}{2} bc \times cd + \frac{1}{2} ae \times ed$: luego la suma de estas dos superficies ó la del trapecio será $\frac{1}{2} (bc+ac) \times cd$. Si se toma $ao = ob$, y se tira ot paralela á bc, será la superficie del trapecio $cd \times to$: porque tirando por o la mn paralela á ec, se tiene $2to = en + mc$, y $to = \frac{1}{2} (en+mc) = \frac{1}{2} (ac+bc)$, poniendo bm en lugar de an su igual en los triángulos aon, bom iguales, por tener $ao = ob$, los ángulos en o iguales (22). y lo mismo a y b (45).

184 *La superficie de un polígono regular* ABCDE (fig. 51) *es el producto del radio recto por la mitad de su perímetro*; porque siendo la superficie de cada uno de los triángulos iguales en que se divide (108), el producto de su altura OM por la mitad de su base AB (182); será la de todos los triángulos ó la del polígono, el producto de la altura ó radio recto OM por la mitad de todas las bases ó lados del polígono que forman su perímetro. Luego un triángulo que tuviese por base el perímetro del polígono, y su radio recto por altura; tendria la misma superficie que el polígo-

no: pues seria tambien el producto del radio por la mitad del perímetro.

185 Como el círculo es un polígono infinitángulo (162), será su superficie *el producto del radio por la mitad de la circunferencia, ó de esta por la mitad del radio*: y equivaldrá á la superficie de un triángulo cuya base fuese la circunferencia, y la altura el radio. La superficie de un círculo de 20 pies de diámetro, cuya circunferencia es $62\frac{6}{7}$ (168); será $314\frac{2}{7}$ pies cuadrados, producto de 5 mitad del radio, por la circunferencia $62\frac{6}{7}$.

186 La superficie de un *sector de círculo* ACBD (fig. 80) que es el espacio contenido entre dos radios CB, CA y el arco AB, es el producto de la mitad del radio por el valor del arco ADB. Si este arco por eg. es de 32° 40′, y su diámetro de 20 pies; tendrá el arco $5\frac{19}{27}$ pies (168): multiplíquese por 5 mitad del radio, y resultarán 28 [illegible] pies cuadr. por la superficie del sector.

187 Un *segmento de círculo* ABD ó el espacio encerrado entre un arco ADB y su cuerda AB, tiene por superficie á la del sector ADBC ménos la del triángulo ACB. Y la de una corona X se hallará buscando separadamente la de los dos círculos que la componen, y restando la superficie del menor de la del mayor.

188 Para sacar la superficie de un polígono irregular, se le divide en triángulos, en

los ménos que pueda ser, se saca la de cada uno ó de cada dos, si se les puede dar una base comun; y la suma de todos será la del polígono. Si en el ABCDEF (fig. 72) se toma la diagonal BE por base de los dos triángulos SBEC, BFE; se sacará de una vez la superficie de ambos, multiplicando BE por la mitad de las alturas PC, FS, y añadiendo á la superficie que resulte, la de los triángulos FAB, EDC que se sacará cada una por sí; se tendrá la del polígono.

189 Cuando está terminado de alguna linea curva irregular, se le reduce segun lo muestra la figura 81, á polígono rectilineo, y despues de medir las superficies mistilineas restantes, ó como triángulos ó como segmentos de circulo, se unirán á la del polígono para tener la total sin error sustancial.

De consiguiente cualquier terreno accesible ó inaccesible se podrá medir, levantando su plano (158 y *sig.*), y midiendo despues la superficie del plano que resulte en el papel en partes de la escala que sirvió para el plano; esa misma deberá ser la del terreno en pies ó varas. Cuando el terreno está terminado de lineas curvas como suele suceder en un pantano, bosque ó montaña; cierresele entre lineas rectas, y cercénense de la superficie que resulte, las porciones que no le pertenezcan.

Conviene advertir que el terreno que está en cuesta, no se debe apreciar por su su-

perficie aparente, sino por la utilidad que puede tener en labranza, árboles, casas &c. Todo esto se planta y se edifica perpendicularmente: es decir, que en la cuesta AB (fig. 128) por eg. nunca se podrán plantar mas árboles que los que caben en la linea orizontal AD. De consiguiente si se gradúa que cabrán en la cuesta la mitad que en DA; se debe valüar la superficie de la cuesta en la mitad de AD, y aun en menos, por la incomodidad que trae labrar ó edificar en terreno que está pendiente.

ARTÍCULO III

Reduccion y division de las superficies

190 Un paralelógramo BCDF (fig. 45) se trasforma en un cuadrado, igual en superficie; buscando (139) una media proporcional M entre la base BC y la altura DT, y esta será el lado del cuadrado: porque siendo BC:M::M:DT; será (197 *t.* I) $BC \times DT = M^2$: ó la superficie del paralelógramo igual á la del cuadrado.

191 Una media proporcional entre la mitad de la base y la altura, ó entre la base y la mitad de la altura de un triángulo, seria el lado del cuadrado igual á él en superficie (182): y la media proporcional entre el radio y la semicircunferencia de un círculo dará el

lado del cuadrado de una misma superficie que él (185).

192 *Una figura rectilínea cualquiera* ABCDE (fig. 82) *se reduce á otra igual en superficie, y que tenga un lado ménos*; tirando la diagonal BD, y por el punto C la CG paralela á BD, que cortará en G el lado AB alargado; tirando despues la DG, resultará el cuadrilátero AGDE igual al pentágono ABCDE. Porque siendo iguales los triángulos GBD, CBD (97) por ser de una misma base y estar entre las paralelas BD, CG; si del pentágono se quita el triángulo CBD, y se le pone su igual GBD, quedará AGDE=ABCDE. Si al cuadrilátero AGDE se le quita por el mismo método otro lado AE, quedará reducido al triángulo FDG igual á él en superficie: de consiguiente cualquiera figura rectilínea podrá trasformarse en un triángulo de igual superficie, igualmente que en cuadrado (190).

193 *Para reducir un triángulo* ABC (fig. 83) *á otro igual en superficie, que tenga su vértice en un punto dado* D: tírese á los puntos A, C las DA, DC; por el vértice B la BH paralela á la base AC, y por el punto H donde la DA corta á BH, la HE paralela á DC; y tirando finalmente la DE, será ADE el triángulo que se pide. Porque tirando la HC, los triángulos DHE, HEC de una misma base HE, y que estan entre las paralelas DC, HE, son iguales (97): júntense

con el triángulo AHE en la 1.ª figura, y réstense de AHE en la 2.ª y 3.ª y resultará el triángulo ADE igual á AHC: y como este es igual á ABC triángulo dado, por tener una misma base y estar entre las paralelas BH, AC; será el triángulo ADE=ABC.

De esta práctica se deduce el modo de trasformar un triángulo isósceles ó equilátero ABC en otro obtusángulo ó escaleno ADE que le sea igual. Y si se quiere reducir el ABC (fig. F) isósceles ó equilátero á otro igual que sea rectángulo; despues de bajar la perpendicular CD, y alargar la base AB hasta que DE sea igual á AB, se tendrá ABC=EDC rectángulo.

194 *Para dividir un triángulo* ABC (fig. 84) *en las partes iguales que se quiera por eg. en dos, con líneas tiradas desde un punto dado* D; se dividirá la base AC en dos partes iguales en E, á donde se tirarán las EB y ED, y desde B la BF paralela á DE: tírense por último DF, DB, y estas dividirán al triángulo en dos partes BDFA, DFCB iguales. Porque los triángulos ABE, EBC de bases CE, AE iguales, y de una misma altura BE, son iguales (97): tambien lo son BEF, BDF, por tener una misma base BF y estar entre las paralelas BF, DE: añádanse á ABF, y resultará el triángulo ABE mitad del total ABC, igual al trapezoide AFDB: y de consiguiente la porcion DFCB será la otra mitad.

Si se pidiese encontrar en un lado AC *del triángulo* ABC (fig. G) *un punto desde donde se le divida en cualquier número de partes iguales como en cuatro*; se tomará AH=¼AC, y tirando la HB, será AHB la cuarta parte de ABC: divídase despues BHC en las tres partes iguales BHF, FHE, EHC como hemos dicho ya(195), y quedará ABC dividido como se pide.

195 *Para dividir en cualesquiera partes, por eg. en dos, un cuadrilatero* ABCD (fig. 85) *desde un punto* E *dado en uno de sus lados*; se reducirá primero al triángulo ADF (192), se tirará despues la DE y la DG á la mitad G de la base AF; y será el triángulo ADG mitad de ADF ó del cuadrilátero ABCD: finalmente trácese por G la GH paralela á DE, y tirando EH, dividirá al cuadrilátero como se pide. Porque siendo iguales los triángulos DEH, DEG de una misma base que estan entre las paralelas GH, DE, si se añaden á ADE; se tendrá ADG mitad del cuadrilátero, igual á ADHE.

196 *Para dividir en cuantas partes se quiera, sea en tres, el polígono* ABCDE (fig. 86) *con lineas tiradas desde uno de sus ángulos* D; trasfórmesele en el triángulo TDF (192), divídase su base TF en tres partes iguales en H y G, y tirando DH, DG; quedará dividido el polígono en tres partes iguales: pues son iguales los tres triángulos TDH, HDG, GDF que tienen una misma altura y

bases iguales. Cuando alguno de los puntos G, H, &c. cae fuera del polígono, como sucede en ABCDE (fig. 86*), el cual si se divide en cuatro partes iguales como acabamos de decir, queda fuera el punto H; se reduce el triángulo HDI al cuadrilátero AODI, tirando por H la HO paralela á AD.

197 *Un cuadrilátero* ABCD (fig. H) *se dividirá en cualesquiera partes iguales por eg. en tres con líneas tiradas desde un punto* I *dado en uno de sus lados*; dividiendo AB en tres partes iguales en M y N, tirando las LM, NK paralelas á AD, que dividirá en tres partes iguales el paralelógramo ABCD: divídanse por medio ML, NK en O y R, y tirando por ellos TH, TS, partirán al paralelógramo como se pide.

ARTÍCULO IV

Comparacion de las superficies

198 Siendo la superficie de un paralelógramo el producto de la base por su altura (180): si llamamos B la base, A la altura, S la superficie de uno; b, a, s la base, altura y superficie de otro; será $S = B \times A$, $s = b \times a$: luego $S : s :: B \times A : b \times a$; es decir, *las superficies de los paralelogramos* son como los productos de sus bases por sus alturas, ó *estan en razon compuesta de bases y alturas* (194 *t.* I).

199 Cuando $B=b$, la proporcion $S:s::AB:ab$, se reduce á $S:s::A:a$, y cuando $A=a$, es $S:s::B:b$: esto es, *los paralelogramos de una misma base son como sus alturas, y los de una misma altura son como sus bases.*

200 *Si las bases de los paralelogramos están en razon inversa de sus alturas, serán sus superficies iguales: y si son iguales, tendrán bases y alturas reciprocas*: porque si $B:b::a:A$, será (196 *t.* I) $B\times A=b\times a$ ó $S=s$: y si $S=s$ ó $B\times A=b\times a$, será (198 *t.* I) $B:b::a:A$.

201 Como los triángulos son mitades de los paralelogramos de igual base y altura (96), tendrán tambien (205 *t.* I) *la razon compuesta de bases y alturas; los de igual base serán como las alturas; y los de igual altura como sus bases: los iguales en superficie tendrán sus bases en razon inversa de sus alturas; y los que tengan bases y alturas reciprocas, serán iguales en superficie.*

202 En los paralelogramos y triángulos semejantes, en los que la razon de las bases es igual á la de las alturas (148), será la razon compuesta de bases y alturas que tienen dichas figuras (196), duplicada de cualquiera de ellas (194 *t.* I); luego *los paralelogramos y triángulos semejantes tienen la razon duplicada de sus bases ó alturas, ó son como sus cuadrados*: y como las bases y alturas son proporcionales á todos los lados homólogos, *serán dichas figuras como los cuadrados de sus*

lados homólogos; y así será $S{:}s{::}A^2{:}a^2{::}B^2{:}b^2$ &c.

203 Luego *las superficies de cualesquiera figuras que tienen la razon compuesta de los dos factores que las producen, cuando son semejantes; tendrán la razon duplicada de sus lados homólogos, ó serán como sus cuadrados:* pues siendo los triángulos en que dichas figuras pueden dividirse, partes semejantes suyas (149), deberán tener la misma razon que ellos (194 *t.* I), que es la de los cuadrados de sus lados homólogos (200). Y así, *las superficies de los polígonos regulares semejantes son entre sí como los cuadrados de sus perímetros, diagonales, radios rectos y oblicuos: y las superficies de los círculos ó semicírculos son como los cuadrados de las circunferencias, radios, diametros, arcos y cuerdas semejantes.*

204 Por ser (141) $(ab)^2 = ac \times ad = acpd$ (fig. 87), y $(bc)^2 = ac \times dc = dpfc$; será $(ab)^2 + (bc)^2 = acpd + dpfc$: ó el cuadrado V de la hipotenusa ac igual á la suma $X+Z$ de los cuadrados de los otros dos lados ab, bc: proposicion que demostramos (141): y que tambien consta de que siendo semejantes los triángulos abc, abd, bdc (135), será (200) $abc{:}abd{:}bdc{::}(ac)^2{:}(ab)^2{:}(bc)^2{::}V{:}X{:}Z$, y siendo $abc = abd + bdc$, será $V = X + Z$.

205 Luego 1.º $X = V - Z$, y $Z = V - X$ *ó el cuadrado de cada lado del ángulo recto, es igual á la diferencia entre los cuadrados*

de la hipotenusa y del otro lado. 2.° Cuando el triángulo rectángulo es isósceles, el cuadrado de la hipotenusa es duplo del cuadrado de cada lado, esto es, $(ac)^2=2(ab)^2$; y de consiguiente $ac=\sqrt{2(ab)^2}=ab\sqrt{2}$, que es una cantidad incommensurable, y como ac es entonces diagonal del cuadrado $abcV$, *será la diagonal de un cuadrado inconmensurable con sus lados*; es decir, no podrá con los lados espresarse el valor de la diagonal.

206 3.° *Toda figura formada sobre la hipotenusa de un triángulo rectangulo es igual á la suma de las semejantes trazadas sobre los otros dos lados*: por eg. el semicírculo $abca$ es igual á los semicírculos aXb, bZc: pues siendo $abca{:}aXb{:}bZc{::}(ac)^2{:}(ab)^2{:}(bc)^2$ (201), y $(ac)^2=(ab)^2+(bc)^2$; será tambien $abca=aXb+bZc$. Si se quita de ambas partes $aoba$, $bhcb$ comun, queda $aXbo+bZch$ igual al triángulo abc, y cuando $ab=bc$, se tiene $aobX=abd$. Las porciones de círculo $aXbo$, $bZch$ se llaman las *lúnulas de Hipócrates*, quien encontró su cuadratura.

207 4.° *El cuadrado de la hipotenusa es á los cuadrados de los otros dos lados, como la hipotenusa á los segmentos correspondientes á dichos lados*; ó $(ac)^2{:}\ (ab)^2{:}\ (bc)^2{::}ac{:}ad{:}dc$: porque $(ac)^2{:}(ab)^2{:}(bc)^2{::}abc{:}abd{:}bdc{::}ac{:}ad{:}dc$; pues teniendo los tres triángulos una misma altura bd, serán como sus bases ac, ad, dc (199).

208 5.º *Luego los cuadrados de dos cuerdas ab, ah* (fig. 65) *tiradas desde un estremo a del diámetro, son entre sí como las partes ad, ar que cortan en el las perpendiculares bd, hr bajadas de los estremos de dichas cuerdas*: porque en el triángulo rectángulo abc, $(ac)^2 : (ab)^2 :: ac : ad$, y en ahc es $(ac)^2 : (ah)^2 :: ac : ar$; luego $(ab)^2 : (ah)^2 :: ad : ar$.

209 *De las figuras regulares isoperímetras la que tiene mas lados incluye mayor superficie.* Sean por eg., un cuadrado y un pentágono (fig. 88): si se inscribe en ellos un círculo, estarán sus superficies en razon de los radios *ac*, *nm*; pues son el producto de la mitad de su perímetro por dichos radios: luego *nm* es mayor que *ca*: porque si fueran iguales y de consiguiente sus círculos, sería menor el perímetro del pentágono que el del cuadrado (102), contra lo supuesto de ser iguales: luego es mayor la superficie del pentágono que la del cuadrado. De consiguiente *el círculo que es un polígono de infinitos lados, tiene mayor superficie que otra cualquier figura de igual perímetro.*

210 Para hacer dos figuras que tengan entre sí una razon dada como la de 1:3: se tomarán en una línea indefinida *ac* (fig. 65) dos partes que sean entre sí como 1 : 3, de suerte que sea $3ad = dc$: desde su mitad *o* se trazará un semicírculo, y levantando en *d* la perpendicular *db*, serán *ab*, *bc* tiradas á los es-

tremos del diámetro los lados homólogos de las figuras que se piden, las cuales se trazarán semejantemente sobre ellos. La razon de la operacion es evidente; pues las figuras semejantes trazadas sobre *ab* y *bc*, son entre sí (201) como $(ab)^2:(bc)^2::ad:dc::1:3$ (206); luego &c.

211 Si dada la figura *abcde* (fig. 71) se desease otra de una superficie tripla, ó que tuviese con ella la razon de 3:1, suponiendo á uno de sus lados *ab* de 10 varas, hallaríamos el homólogo AB de la otra figura, haciendo $1:3::(10)^2:300$, cuadrado de AB; de suerte que $AB=\sqrt{300}=17,32$ varas con poca diferencia: hágase ahora $ab:AB::bc:BC::cd:CD::dc:DE$, y se tendrá la longitud de los demas, que unidos con ángulos iguales á *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, formarán la figura ABCDE que se desea.

SECCION III

Artículo I

De los Sólidos

212 La última especie de estension que reune longitud, latitud y profundidad ó altura, se llama *sólido*, *cuerpo ó volúmen geométrico*. *Será regular*, si las superficies que le rodean, son iguales y semejantes, y sus ángulos sólidos iguales; los demas son *irregulares*. El cuerpo de cuatro superficies se llama *tetrae-*

dro, el de cinco *pentaedro*, y *exâedro, eptaedro, octaedro....polyedro* el de seis, siete, ocho.... y muchas superficies.

213 Llamamos *ángulo sólido* al formado de mas de dos ángulos planos que concurren en un punto: tal es H (fig. 89) compuesto de los ángulos DHA, AHB, BHC, CHD. La medida de estos ángulos compone la del ángulo sólido que es siempre menor que 360°: pues si se tira la perpendicular HO, y las DO, CO, BO, AO; será cada ángulo AOD mayor que su correspondiente AHD, por tener su vértice mas cerca de la base comun AD; luego todos los ángulos formados en H valen menos que los formados en O que componen 360° (19).

Tambien *cada ángulo de los que forman el ángulo sólido, es menor que la suma de los demas*: pues si llegase DHC por eg. á ser igual á DHA+AHB+BHC, puestos estos sobre aquel no compondrian un sólido sino un plano.

214 El sólido ABCFDE (fig. 90) cuyas dos caras opuestas ABC, DEF que son sus *bases*, son dos planos iguales y paralelos, y las demas superficies ABED, EBCF, FDAC paralelógramos; se llama *prisma*: y puede considerarse formado por el plano ABC moviéndose paralelamente á sí mismo lo largo de la recta AD, dejando rastro de su camino. ABC se llama *plano generador*, y cada plano infinitamente delgado de los que forma, *elemen-*

to del prisma. La perpendicular HO tirada de cualquier punto de una de las bases á la otra, es la *altura*: y las lineas AD, BE, FC *lados* del prisma. Cuando estos son perpendiculares á la base ó iguales á la altura, se llama el prisma *recto*: y *oblicuo* (fig. 91) cuando no. Ultimamente, será *triangular*, *cuadrangular* *pentagonal* &c. el prisma, segun que el plano ABC sea triángulo, cuadrilátero, pentágono &c.

215 Cuando el plano generador es un paralelógramo ABCD (fig. 92), el prisma que resulta, toma el nombre de *paralelepipedo*, que tiene por superficies seis paralelógramos: cuando es un *cuadrado* ABCD (fig. 93), consta de seis cuadrados iguales, y se llama *cubo*. Un círculo AEBF (fig. 94) produce un sólido ABDC que se llama *cilindro*: que será recto cuando cae perpendicular la línea OH que pasa por los centros de las dos bases, y es su *ege*: y *oblicuo* (fig. 95) cuando cae inclinada. Tambien puede considerarse producido el cilindro por el rectángulo AOHC que dé una vuelta al rededor de HO (fig. 94).

216 Si nos figuramos que una recta AH (fig. 89) fija en el punto H, corre con el estremo A los lados de la figura ABCD; habrá producido la superficie lateral de un sólido que se llama *pirámide*, cuya base es ABCD, y cuyas caras son triángulos que tienen su vértice en un mismo punto H, que es el *vertice* ó *cuspide* de la pirámide: su *altura* es la

HO tirada perpendicularmente desde el vertice H á la base, y su *ege* la tirada desde H al centro del polígono de la dicha base. Cuando el ege es diferente de la altura, y el polígono de la base irregular, será la pirámide *irregular*: pero si coincidiese el ege y la altura, y el polígono de la base es regular: lo será tambien la pirámide, y todos los triángulos CHB, BHA &c. serán iguales é isósceles. Una perpendicular HT, tirada desde H sobre uno de los lados de la base, la dividirá por medio (82), y será la altura de todos los triángulos: se llama *apotecma*. La pirámide *triángular* tiene por base un triángulo, la *cuadrangular* un cuadrilátero &c.

217 Si la base de la pirámide fuese un círculo (fig. 96) ó un polígono de infinitos lados, resultará un sólido que se llama *cono*: que se puede considerar formado por el triángulo rectángulo AOH que diese una vuelta al rededor de OH: OH es su *ege* y *altura* cuando es perpendicular: las líneas AH, CH &c. sus *lados*, que se equivocan con los apotecmas; y segun que la OH sea ó no perpendicular á la base, será *recto* ú *oblicuo* el cono.

218 Si el semicírculo AEB (fig. 97) da una vuelta entera al rededor de su diámetro AB, producirá la *esfera* AEBDA, que es un sólido de revolucion terminado de una superficie curva, cuyos puntos distan igualmente del punto C que es su *centro*. El arco FA forma en la

revolucion el *casco ó casquete esférico* FTHA. El sector circular FCA engendra el *sector esférico* CFAHT: FAO mitad del segmento FAH produce el *segmento esférico* FTHAO, cuya base es el casquete FTHA. Á cualquiera AB de los diámetros llamarémos *ege* de la esfera, *polos* á sus dos estremos A, B; y *zona* á la parte EHFD comprendida entre dos planos paralelos.

219 Un semipolígono que hubiera dado una vuelta al rededor del diámetro, hubiera producido un *esferoide*, regular ó irregular segun fuese el polígono: y como el círculo es un polígono infinitángulo (102); será tambien la esfera un esferoide *infinitángulo*.

220 Si imaginamos perpendiculares tiradas desde la circunferencia á todos los puntos del diámetro AB, cada una describirá como radio en la revolucion un círculo, y de consiguiente juntos todos formarán la solidez de la esfera: luego si á la esfera la corta un plano cualquiera; la seccion será un círculo, tanto mayor cuanto mas cerca esté del centro: los que pasan por él, se llaman *círculos máximos*, y los demas *menores*.

ARTICULO II

De la medida y comparacion de las superficies de los cuerpos

221 La superficie del prisma recto (fig. 90) sin contar la de sus bases ABC, DEF, que se llama *lateral*, se compone de los paralelogramos rectángulos AE, EC, AF, cuya medida es (180) el producto de sus bases AB, BC, AC por la altura comun AD. Las caras del prisma oblicuo (fig. 91) son los paralelogramos AG, GD, DT, TE, EF de los lados AF, BG, DH &c. iguales, cuya superficie considerando á estos lados como bases de los paralelogramos, y tirando sobre ellos sus alturas, ó las perpendiculares *ab*, *bc*, *cd*, *de*, es (180) el producto de estas últimas por una de las bases ó lados iguales AF. Lo mismo se debe aplicar al paralelepípedo, cubo y cilindro.

222 Luego la superficie lateral ó sin contar las bases, de un prisma (fig. 90), es el producto del perímetro ABC de su base por la altura AD si es recto; y si es oblicuo, el producto de uno de sus lados AF por el perímetro *acbf* perpendicular á dicho lado. La superficie del cilindro AD (fig. 94) es el producto del perímetro AEBF por la altura AC. Para medir la del cilindro oblicuo AD (fig. 95); basta para la práctica multiplicar uno de sus

lados BD por la longitud de un hilo enrollado por el vestigio de la seccion *abcd* perpendicular á BD. La superficie lateral se añade á la de las dos bases para tener la total.

223 Los triángulos ADH, ABH, BCH, DCH (fig. 89) que son las caras de la pirámide ABCDH, tienen por superficie (182) al producto de sus bases AB, BC, CD, DA por la mitad de HT altura de todos los triángulos (214): luego *la superficie lateral de una pirámide es el producto del perímetro* AB+BC+CD+DA *de la base por la mitad de su apotema*, ó $\frac{1}{2}$ (HT×ABCDA). En la pirámide inclinada se mide cada cara de por sí, y la suma de la superficie de todas es la de la pirámide. La superficie lateral del cono ACH (fig. 96) es la mitad del producto de la circunferencia ABCD de la base por uno de sus lados AH, ó $\frac{1}{2}$ (AH×ABCDA).

224 En un trozo ó tronco de pirámide de bases, *abc*, ABC paralelas (fig. 98) los trapecios A*b*, B*c*, C*a*, componen su superficie que es (183) el producto de la mitad de sus bases paralelas AB, *ab*; BC, *bc*; CA, *ca* por la altura comun *ht*; ó tirando *mp*, *pn*, *nm* por la mitad de A*a*, B*b*, C*c*; *ht*<*mpn*: luego *la superficie lateral de un tronco de pirámide es la mitad del producto de los perímetros abc*, ABC *de sus bases por la altura ht*, *esto es* $\frac{1}{2}$(*abc*+ABC)×*ht*: *ó mpn*×*ht*, *producto del perímetro mpn medio entre los de las bases por*

la altura ht. Tambien la superficie del tronco A (fig. 99) *de pirámide conica es* $\frac{1}{2}$(*abc*+ABC)×Aa, *mitad del producto de los perimetros de las bases por su lado, ó mpn*×Aa *producto del perimetro medio por dicho lado.*

225 Si consideramos á *ab* (fig. 97) como uno de los infinitos lados del semicirculo BEA que produce la esfera, formará en su revolucion un cono truncado: cuya superficie, tirando las paralelas *ad*, *bq*, y por *n* mitad de *ab*, la *nm*: será (222) *ab*×*circunferencia mn.* Bajando ahora la *ar* perpendicular á *bq*, y tirando el radio C*n*; en los triángulos *abr*, C*on* semejantes (131) se tiene *ab*:*ar*=*tp*::C*n*:*no*; y por ser las circunferencias proporcionales á sus radios (167): será *ab*:*tp*::*circunf.* C*n*: *circunf. no*: luego (196 *t.* 1) *ab*×*circunf. no*=*tp*×*circunf.* C*n*: ó la superficie del cono truncado descrito por *ab*, igual á su ege *tp* multiplicado por la circunferencia del círculo maxîmo de la esfera. Pruebese lo mismo de todos los solidos que componen la esfera, y tendremos *que su superficie es el producto de su ege* AB *por la circunferencia de su circulo maximo*: de suerte que si suponemos que el diámetro AB tenga 20 pies, y de consiguiente 62$\frac{6}{7}$ la circunferencia de su círculo: serán 20×62$\frac{6}{7}$ ó 1257 los pies cuadrados que contiene la superficie de la esfera.

226 De aqui se infiere 1.º que la superficie del casco esférico AFTH es el producto

de su altura OA por la circunferencia del círculo máxîmo: y la de la zona DEHF el producto de OC por la circunferencia de dicho círculo. 2.° Que la superficie de un círculo cuyo radio fuese el ege de la esfera, sería igual á la de la esfera: pues la circunferencia de este círculo sería dupla de la del círculo máxîmo de la esfera.

227 3.° Como la superficie del círculo máximo es el producto de la circunferencia por la mitad del radio, que es la cuarta parte del diámetro, y la de la esfera el producto de dicha circunferencia por todo el diámetro; *equivaldrá esta á la de cuatro círculos máximos*. De consiguiente, siendo la superficie lateral del cilindro circunscripto (fig. 100) el producto de HM ó AB ege de la esfera por la circunferencia de uno de sus círculos máximos HOGR ó EQFT, es decir, igual á la de la esfera; si á la del cilindro se añade la de sus dos bases que son círculos máximos, compondrá seis círculos máximos; y la superficie total del cilindro circunscripto á la esfera, será á la de la esfera como 6:4, ó como 3:2.

228 *Sólidos semejantes* son los que constan de ángulos sólidos iguales y de igual número de superficies semejantes; y así los de diferente especie como un prisma y una pirámide no pueden ser semejantes. Como las superficies de los sólidos se componen de dos factores del mismo modo que las superficies pla-

nas; demostrarémos como en ellas (196 *y sig.*), las proposiciones que siguen.

229 »Las superficies laterales de los pris»mas son entre sí como los productos de sus »alturas por el perímetro de sus bases, si son »rectos; ó por el de la seccion perpendicular »á las alturas, si son oblicuos. Los prismas »de igual altura son como los perímetros de »sus bases, los de igual perímetro son como »sus alturas; y los de alturas y perímetros »recíprocamente proporcionales son de super»ficies iguales, y al contrario. Lo mismo se »debe entender de las pirámides ó conos con »la diferencia de poner lado en lugar de al»tura.

230 »Las superficies de los sólidos se»mejantes son entre sí como los cuadrados de »sus líneas homólogas; y de consiguiente las »superficies de dos esferas son como los cua»drados de sus radios ó diámetros.

ARTÍCULO III

De la medida y comparacion de las solideces de los cuerpos

231 La *solidez* de un cuerpo que es el espacio que ocupan sus superficies, sea ó no mazizo, se mide averiguando las veces que en él cabe otro cuerpo que se toma por la unidad. El escogido para esto es el *cubo*, que por

tener todas sus dimensiones iguales, es el mas sencillo. Sea *ab* (fig. 92) el sólido que se toma por la unidad, y averigüemos las veces que cabe en el prisma AT.

232 A este sólido le forma el plano ABCD que corre paralelamente la linea CT (213): luego á cada paso *Cb* que ande dicho plano, igual á la altura *db* del sólido *ab*, formará tantos sólidos iguales á *ab*, cuantas veces la base cabe en el plano AC: si son cuatro, será la solidez del prisma tantas veces cuatro sólidos iguales á *ab*, cuantas la altura *db* quepa en CT; luego será el producto del numero de veces que la base *ad* cabe en AC, multiplicado por el número de veces que la altura *db* cabe en la altura CT, ó mas brevemente *el producto de la superficie de la base por la altura, y si es recto, por su lado.*

233 Para sacar la solidez del paralelepipedo AT en la suposicion de ser AB de 15 pulgadas, CB de 8 y AE de 20; sacaré la superficie de la base BD, multiplicando AB por CB ó 15 por 8, y multiplicando el producto 120 por la altura AE que es 20; tendré 2400 pulgadas cúbicas ó cubos de una pulgada: que equivalen á 1 *pie cubico* y $\frac{7}{18}$ de *pie*, dividiendo 2400 por $12\times12\times12=1728$, número de pulgadas cúbicas que contiene un pie cúbico.

234 Luego la solidez *de un cilindro recto* AD (fig. 94), *es el producto de la super-*

ficie de su base AEBF *por su ege: y la del oblicuo* (fig. 95) *el producto de la superficie de su base* AEBF *por la altura* HO: de consiguiente serán iguales en solidez los cilindros y prismas que tengan una misma base y altura.

235 Un plano RQ (fig. 101) que corte á una pirámide TABCDE paralelamente á la base, cortará proporcionalmente los lados AT, BT, CT &c. y cualquiera otra recta TO tirada del vértice á la base, y en la misma razon que dos cualesquiera lados homólogos AB, *ab*, de la seccion. Pues si por la recta TO y los lados de la pirámide imaginamos los planos TOA, TOB, TOC &c cortarán la seccion *abcde* en *oa*, *ob*, *oc*, *oe*, *od*, las cuales serán paralelas á OA, OB &c. por ser secciones comunes de los planos paralelos RQ, ABCDE (178); luego los triángulos ATO, BTO, CTO &c. serán semejantes á sus correspondientes *a*To, *b*To, *c*To &c. y sus lados proporcionales, TO, To::TA:T*a*::TB:T*b*::TC:T*c* &c. ::AB:*ab*::BC:*bc* &c.

236 Luego 1.º las *secciones* ABCDE, *abcde serán semejantes*; pues se dividen en igual número de triángulos semejantes, por tener paralelos sus lados: y de consiguiente sus areas serán como los cuadrados de las lineas TO, To; pues se tendrá (200) ABCDE: $abcde$::$(AB)^2$:$(ab)^2$::$(TO)^2$:$(To)^2$; por ser AB: *ab*::TO:To (233).

237 2.º Si suponemos iguales las alturas TO, MN de las pirámides TABCDE, MFGH cortadas por el plano RQ; estarán las seccio-

nes *abcde*, *fgh* en la misma razon que las bases ABCDE, FGH: y serán iguales si lo son las bases. Pues siendo ABCDE:*abcde*::$(TO)^2$:$(To)^2$; FGH : *fgh*:: $(MN)^2$: $(Mn)^2$, y MN=TO; será $(TO)^2$: $(To)^2$:: $(MN)^2$: $(Mn)^2$, y de consiguiente ABCDE:*abcde*::FGH:*fgh*; luego si ABCDE=FGH, será tambien *abcde*=*fgh*.

233 3.° *Las pirámides de igual base y altura son iguales en solidez, aunque sea diferente la figura de sus bases*; pues serán (202 t. I) todos los planos ó elementos que componen la solidez de la una, á todos los de la otra, como la base de la 1.ª á la de la 2.ª luego siendo iguales las bases, serán tambien iguales todos los planos; y debiendo haber en ambas igual número de ellos por haberse supuesto de igual altura, serán las solideces iguales.

239 Esto supuesto, vamos á probar *que cualquier pirámide es la tercera parte de un prisma de igual base y altura que ella*: y puesto que todo prisma polígono puede dividirse en prismas triangulares de igual base y altura; bastará demostrar la proposicion del prisma triangular EDFBAP (fig. 102). Para esto tírense desde uno de sus angulos P las diagonales PE, PF en las caras laterales AEDP, BFDP.

Imaginemos despues un plano que pasando por EP y PF, separe del prisma la pirámide PEFD, y otro que pasando por las dia-

gonales EB, EP separe del sólido APBEF que queda (fig. 103), la pirámide APBE; y tendremos dividido el prisma en las tres pirámides PEFD, APBE, EFPB. De ellas las dos primeras de bases EDF, ABP y alturas PD, AE iguales, son iguales en solidez (236): y las APBE, EFPB consideradas sobre las bases ABE, BEF que son triángulos iguales, y con el vértice comun P, serán tambien iguales: luego siendo la una PEFD de una misma base EFD y altura DP que el prisma, será así como las otras; su tercera parte.

240 Siendo pues, la solidez del prisma producto de la superficie de la base por su altura (230), será la de cualquier pirámide la tercera parte de este producto, ó *la superficie de la base multiplicada por el tercio de la altura.*

241 Y como el cono debe ser tambien la tercera parte del cilindro de igual base y altura, por ser prisma infinitángulo: será su solidez *el producto de la superficie de la base por el tercio de su altura.*

242 Para sacar la solidez de un trozo de pirámide ó cono de bases paralelas (fig. 98 y 99); imaginándole completo, se saca su solidez multiplicando la base ABC por $\frac{1}{3}$ TO, multiplicando despues *abc* por $\frac{1}{3}$ To, resultará la solidez del trozo T*abc* que falta: réstese esta de la total, y se tendrá la del tronco. La To que se supone conocida en esta operacion,

se saca por lo demostrado (233): pues siendo AB : *ab* : : TO : To; tendremos (199 *t.* I) AB—*ab*:*ab*::TO—To:To ó AB—*ab*:*ab*::Oo:To.

243 *La solidez de la esfera es el producto de su superficie por el tercio de su radio:* porque si la concebimos compuesta de una infinidad de pirámides que tienen los vértices en su centro, y cuyas bases componen su superficie; tendrán todas por altura el radio de la esfera: y será la suma de sus solideces ó la de la esfera el producto de todas sus bases, superficie de la esfera, por un tercio de su altura, que es el radio: y así la solidez de una esfera de 20 pies de diámetro, cuya superficie es $1257\frac{1}{7}$ (223), será $3\frac{1}{3}\times 1257\frac{1}{7}=4190\frac{10}{21}$ pies cubicos. Si suponemos con Newton que el diámetro de nuestro globo tiene 19688725 pies de París, y la circunferencia de uno de sus círculos máximos 61878850; tendrá su superficie (223)....... 1218315660966250 pies cuadrados: y el producto de este número por la sesta parte del diámetro dará 39978467989403449275oo pies cúbicos de que constará la tierra.

244 Luego la solidez de un sector esférico CFAHT (fig. 97) es el producto de la superficie del casco FTHA por el tercio del radio. Como esta se compone del segmento FOHTA y del cono CFH: si de la solidez del sector se resta la del cono, resultará la del segmento.

245 *La solidez de la esfera es los dos tercios de la del cilindro circunscripto.* Llamemos al radio R, D al diámetro, C la superficie del círculo máximo HOGR ó EQPT (fig. 100); será 4C la superficie de la esfera (225), y su solidez $\frac{1}{3}R\times4C=\frac{4}{3}R\times C$, esto es, $\frac{2}{3}D\times C$, por ser $\frac{4}{3}$ del radio $\frac{2}{3}$ del diámetro: y como la solidez del cilindro es $D\times C$; será la 1.ª á la 2.ª como $\frac{2}{3}D\times C:D\times C$ ó como $\frac{2}{3}:1$, ó últimamente como 2:3.

246 Como toda solidez es producto de una superficie que tiene dos factores, por una línea; si llamamos B, C los factores de la superficie ó base, A su altura, S la solidez de un cuerpo, s la solidez de otro, y a, b, c sus tres factores: tendremos $S=A\times BC$, $s=a\times bc$. Luego será $S:s::A\times BC:a\times bc$, es decir, *las solideces de dos prismas ó cilindros, ó de un prisma y un cilindro son entre sí como los productos de su base por la altura.* De consiguiente, *los de igual basé serán como sus alturas, y los de igual altura como sus bases:* pues si $A=a$, resulta $S:s::BC:bc$: y si $BC=bc$; $S:s::A:a$.

247 Cuando $A:a::bc:BC$, se tiene (196 t. I) $A\times BC=a\times bc$ ó $S=s$: esto es, *si las bases de los solidos estan en razon recíproca con las alturas, serán sus solideces iguales, y al contrario.* Todas estas proposiciones se deben entender tambien de las pirámides ó conos.

248 Cuando los solidos son semejantes, son iguales las razones $A:a$, $B:b$, $C:c$ (226) de

los factores de que se componen las solideces en la proporcion S:s::ABC:abc (244); luego *las solideces de los cuerpos semejantes estarán en razon triplicada, ó serán como los cubos de sus factores homólogos*; ó $S:s::A^3:a^3::B^3:b^3::C^3:c^3$: de consiguiente, *las solideces de dos esferas serán como los cubos de sus radios ó diámetros.*

249 Tenemos pues, que las figuras de los sólidos semejantes son como sus líneas homólogas (166), sus superficies como los cuadrados de dichos lados homólogos (228), y sus solideces como sus cubos (246): de manera que si los diámetros de dos esferas por eg. tuvieran la razon de 3:4; las circunferencias de sus círculos máxîmos serían tambien como 3:4, sus superficies ó las de las esferas serían como $(3)^2$: $(4)^2$ ó como 9: 16, y sus solideces como $(3)^3$: $(4)^3$ ó como 27:64.

250 Luego para hacer una esfera dupla de otra que tuviese 6 púlgadas de diámetro, se haria la proporcion 1:2::216 *cubo del diámetro dado*: 432 *cubo del diámetro de la esfera pedida*: cuyo diámetro será 7,56 raiz cúbica próxima de 432.

ARTICULO IV

Método para medir la capacidad de los vasos que encierran algun liquido

251 Para medir la capacidad de un vaso, ó las veces que contiene una medida que se toma por la unidad; como por lo comun los vasos son cónicos ó cilíndricos, se dispondrá un cilindro AH (fig. 104) de estaño ú hoja de lata, en el que se echará una ó dos azumbres de liquido, y tomando una vara (fig. 105). se señalarán en uno de sus lados las partes E1, 1 2.2 3 &c. iguales á la altura AD que ocupa el líquido en el cilindro.

252 Para dividir el otro lado MN de la vara; se levantará en N la perpendicular NT igual al diámetro AB del cilindro, se tomará $N1 = TN$, y tirando la hipotenusa T1, será diámetro de un circulo ó base dupla de ARB; porque (201) los circulos son como los cuadrados de sus diámetros, y $(T1)^2 = (TN)^2 + (N1)^2 = 2(TN)^2$ (203): señalado pues, T1 desde N á 2, se tirará la hipotenusa T2, y será por la misma razon diámetro de una base tripla de ARB: se trasladará desde N á 3, y se continuará del mismo modo para sacar los diámetros cuádruplo, quíntuplo &c. Si se dividen TN y N1 por medio en K y *t*, y se tira la

Kt; será diámetro de una base mitad de ARB, que se debe pasar de N á t.

253 Para medir ahora el vaso XO (fig. 106); se aplicará el lado NM de la vara al diámetro XZ, y si coge N3, será triplo de la base ARB (fig. 104): y de consiguiente, el hueco XT hará tres veces mas líquido que AC. Mídase despues la altura LX con el lado FE de la vara, y si equivale á cinco divisiones; se deberá multiplicar 3 por 5 para encontrar las azumbres de líquido que caben en el vaso XO, que serán 15.

254 Si el vaso fuere cono truncado, se sacará una base media, sumando las dos: pero si la de arriba fuere muy pequeña, será mejor reducir el vaso á sólido regular: pues si se sacase la mitad de la suma de las dos bases AM y R del vaso ARM (fig. 107); resultaria una base poco mayor que la mitad de AM, y cuyo producto por la altura MC, daria una cavidad igual casi á la mitad del cilindro AC; siendo así que el cono ARM, cuya cavidad se busca, es casi el tercio de dicho cilindro (237).

255 Últimamente, para averiguar el hueco del tonel BQ (fig. 108); tómese un diámetro medio entre los dos DE, AB, que será $2\frac{1}{2}$ si DE equivale en la vara á N3, y AB á N2: sea la longitud CT=E8, multiplíquese 8 por $2\frac{1}{2}$; y el producto 20 será el número de azumbres que caben en el tonel propuesto, que podemos considerar como un cilindro de una

base media proporcional aritmética entre el fondo y su vientre.

ARTICULO V

Sólidos regulares

256 Llamamos así los cuerpos cuyas superficies son todas polígonos regulares é iguales, y cuyos ángulos sólidos se componen de igual número de ángulos planos. Como estos no han de llegar á 360° (211), y seis ángulos de triángulo equilátero componen $6\times60^\circ=360^\circ$; solo podremos formar con ángulos de triángulo equilatero un ángulo sólido de tres, igual á $3\times60^\circ=180^\circ$; de cuatro que vale $4\times60^\circ=240^\circ$; y de cinco, su valor $5\times60^\circ=300^\circ$: de donde resultan el *tetraedro* (fig. 109), cuyas superficies son cuatro triángulos equiláteros, el *octaedro* (fig. 110) que consta de ocho, y el *icosaedro* (fig. 111) que tiene veinte. Con ángulos de cuadrado solo puede formarse un ángulo sólido de tres igual á $3\times90^\circ=270^\circ$; pues $4\times90^\circ=360^\circ$: y con tres ángulos de pentágono ó $3\times108^\circ=324^\circ$ otro, y con ellos se forma el *exáedro* ó *cubo* (fig. 112) rodeado de seis cuadrados iguales, y el *dodecaedro* (fig. 113) que consta de doce pentágonos regulares. Y como tres ángulos del exágono regular valen $3\times120^\circ=360^\circ$; es claro que no puede haber mas sólidos regulares que los cinco referidos.

257 Si se saca la superficie de una de las caras de estos, y se multiplica por el número de ellas; se tendrá la superficie de cada uno. Con este obgeto se han pintado al lado de cada sólido las superficies que le rodean.

258 La solidez del tetraedro se saca como digimos (238): pues es una pirámide equilátera triangular. La del exáedro se encuentra por lo dicho (230). Al octaedro se le considera dividido en dos pirámides iguales y semejantes, y despues se saca la solidez de las dos. Tambien el icosaedro puede imaginarse dividido en veinte pirámides iguales: y así multiplicando por 20 la solidez de una de ellas, se tendrá la del sólido. Ultimamente, tirando rectas desde el centro del dodecaedro á todos sus ángulos, resultarán doce pirámides pentágonas iguales: con que si se multiplica por 12 la solidez de la una, tendremos la del dodecaedro.

SECCION IV

TRIGONOMETRÍA RECTILINEA

259 Si por los varios puntos de una estension cualquiera se tiran lineas que formen diferentes triángulos, y se consigue averiguar el valor de estas lineas y de los ángulos que forman por medio de algunas de estas dos cosas que se nos den conocidas, habremos logrado co-

nocer la posicion y dimension de todas las partes de dicha estension. Esto es justamente lo que se enseña en este ramo de la geometría llamado *Trigonometria* que equivale á *medida de triángulos*, y en la que dado el valor de tres de las seis cosas de que consta un triángulo, que son tres lados y tres ángulos: se prescriben reglas para encontrar el de las otras tres: no siendo los tres ángulos; pues por ellos solo se puede saber la razon de los lados, pero no su longitud, que será diferente en cada uno de los infinitos triángulos que pueden tener unos mismos ángulos (83). A este fin, como los lados de los triángulos no son proporcionales á sus ángulos; se han inventado las líneas trigonométricas, *senos*, *cosenos*, *tangentes*, *secantes* que vamos á dar á conocer: las cuales ademas de ser proporcionales con los lados de los triángulos como veremos (280), son un equivalente de sus ángulos.

260 Llamamos pues, *seno recto* ó seno de un ángulo ACB (fig. 114) ó de su arco AB á la perpendicular AT bajada del estremo A de dicho arco sobre el radio CB, que pasa por el otro estremo B: *seno verso* á la parte BT del radio comprendida entre el seno y el estremo del arco: *tangente* de dicho ángulo ó arco AB á la BH perpendicular al estremo B del radio CB, terminada por el radio AC alargado: y *secante* á la CH o radio AC alargado.

261 Tambien AD=CT es seno del ángu-

lo ACE ó de su arco AE, DE su seno verso, EQ su tangente y CQ su secante: y como el arco AE es complemento de AB; serán AD, DE, EQ, CQ, seno, seno verso, tangente y secante del complemento del arco AB, ó mas brevemente *coseno*, *coseno verso*, *cotangente*, y *cosecante* del arco AB. En lo sucesivo escribiremos *sen*, *cos*, *tang*, *cotang*, *sec*, en lugar de seno, coseno, tangente, cotangente, secante.

262 Segun lo que acabamos de decir 1.° el *seno* AT *de un arco cualquiera* AB *es la mitad de la cuerda* AR *del arco* ABR *duplo de* AB; pues el radio CB perpendicular á AR, la divide por medio (51). Y así *el seno del arco de* 30° *es la mitad de la cuerda de* 60°, *que es el radio* (112).

263 2.° El coseno AD de un arco AB cualquiera es siempre igual á CT parte del radio comprendida entre el centro y el seno: y su seno verso BT es la diferencia entre el radio y el coseno. 3.° La tangente BH *es igual al radio* BC *cuando el ángulo* BCH *es de* 45°: porque siendo el ángulo CBH recto, y BCH de 45°, será tambien BHC de 45° (86), y la BH=BC.

264 4.° Que si en un triángulo rectángulo CAT se toma por radio la hipotenusa, y se traza un arco AB; serán los otros dos lados AT, TC seno y coseno del ángulo ACT: y si se toma por radio uno de los lados como CB en el triángulo rectángulo HCB, será el otro

BH tangente, y la hipotenusa CH secante del ángulo HCB.

265 En el punto B en que suponemos que no hay arco, tampoco hay seno ni tangente, y el coseno es el radio CB. Al paso que es mayor el arco, crece el seno y la tangente, y disminuye el coseno y cotangente hasta que el arco llega á ser BAE ó de 90°: entonces es el seno el radio EC, que por ser el mayor de todos se llama *seno total* ó de 90°, el coseno es cero y lo mismo la cotangente; y la tangente y secante que resultan paralelas, son infinitas.

266 En pasando el arco de 90° comienzan á menguar los senos y tangentes, y á crecer los cosenos y cotangentes hasta que llega á 180° ó al punto F, en el que es cero el seno y la tangente, el coseno es el radio CF, y la cotangente y cosecante paralelas é infinitas. Pero nótese que en cualquier ángulo obtuso es uno mismo el seno, coseno, tangente &c. que en el ángulo agudo su suplemento: por eg. el seno del ángulo ACF es AT, seno del ángugulo ACB suplemento de ACF; su coseno es AD, su tangente es FG igual á BH, á causa de los triángulos CBH, CFG iguales (90): pero todas estas líneas son negativas cuando pertenecen á los ángulos obtusos, ó están en una situacion contraria á la que tienen cuando pertenecen á los ángulos agudos.

267 Así como un arco se valúa por grados, mayores ó menores segun el círculo; así

tambien el valor de un seno que en diferentes círculos tiene distinta longitud, se espresa en partes en que se considera dividido el radio del círculo, sea grande ó pequeño. Para que este valor sea mas exâcto, se supone que el número de partes en que el radio ó seno total se divide, sea grande como en 1000000, y averiguando cuantas de ellas corresponden á cada uno de los senos, cosenos, tangentes &c. desde 1′ hasta 90°, se ha formado una lista de ellos, que se llama *tabla de los senos*, para cuya formacion se necesita la doctrina siguiente.

268 Si llamamos r el radio AC de un círculo cualquiera, y a el arco AB; será AT, $sen\ a$; CT, $cos\ a$; BH, $tang\ a$; CH, $sec\ a$ &c. Luego si dado el valor del seno AT, se nos pidiese el de las demas lineas; 1.° en el triángulo rectángulo CAT, donde $(CT)^2=(CA)^2-(AT)^2$ (203), ó $CT=\sqrt{((AC)^2-(AT)^2)}$, será $cos\ a=\sqrt{(r^2-sen^2 a)}$, así como $AT=\sqrt{((AC)^2-(CT)^2)}$ ó $sen\ a=\sqrt{(r^2-cos^2 a)}$. 2.° Por ser $TB=CB-CT$ (261), será $sen\ vers\ a=r-cos\ a$.

269 3.° De los triángulos rectangulos semejantes CAT, CBH se saca CT:TA::CB:BH ó $cos\ a : sen\ a :: r : tang\ a$: luego $tang\ a=\frac{r.sen\ a}{cos\ a}$, ó $\frac{sen\ a}{cos\ a}$ suponiendo $r=1$, y poniendo un punto en lugar del signo×. 4.° En los mismos triángulos se tiene CT:CA::CB:CH ó

$\cos a : r :: r : \sec a = \frac{r^2}{\cos a} = \frac{1}{\cos a}$, siendo $r = 1$. 5.° Por ser $DE = CE - CD$, tendremos $\cos \text{vers}\, a = r - \text{sen}\, a$.

270 6.° De los triángulos semejantes CDA, CEQ se saca CD:DA::CE:EQ, ó $\text{sen}\, a : \cos a :: r : \cot a = \frac{r.\cos a}{\text{sen}\, a} = \frac{\cos a}{\text{sen}\, a}$, haciendo $r = 1$. Tambien es BH:CB::CE:EQ ó $\text{tang}\, a : r :: r : \cot a = \frac{r^2}{\text{tang}\, a} = \frac{r}{\text{tang}\, a}$, y $\text{tang}\, a = \frac{r^2}{\cot a} = \frac{1}{\cot a}$ es decir, *que las tangentes estan en razon inversa de las cotangentes*. 7.° Ultimamente, CD:CA::CE:CQ ó $\text{sen}\, a : r :: r : \text{cosec}\, a = \frac{r^2}{\text{sen}\, a} = \frac{1}{\text{sen}\, a}$.

271 Dado el seno $BD = a$ (fig. 115) de un arco cualquiera AB y de consiguiente su coseno CD ó $\cos a$ (266); se tendrá el seno BT de su mitad en el triángulo rectángulo ABD, donde por ser $AB = \sqrt{((BD)^2 + (AD)^2)}$, resulta $\frac{1}{2}AB = BT = \frac{1}{2}\sqrt{((BD)^2 + (AD)^2)}$, ó $\text{sen}\, \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\sqrt{(\text{sen}^2 a + \text{sen vers}^2 a)}$: póngase en lugar de $\text{sen vers}^2 a$ su valor (266) $(r - \cos a)^2$ ó $r^2 - 2r\cos a + \cos^2 a$, y será $\text{sen}\, \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\sqrt{(\text{sen}^2 a + r^2 - 2r\cos a + \cos^2 a)}$: y como $\text{sen}^2 a + \cos^2 a = r^2$ ó $(BD)^2 + (CD)^2 = (CB)^2$ en el triángulo rectángulo BDC; se tendrá por último, $\text{sen}\, \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\sqrt{(2r^2 - 2r\cos a)}$.

272 Si dado BT ó $\text{sen}\, \frac{1}{2}a$, se nos pidiese

el seno $BD = a$ del arco duplo; se sacará de la ecuacion $sen\ \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}\sqrt{(2r^2 - 2r\ cos\ a)}$ el valor de $cos\ a = \frac{r^2 - 2(sen\ \frac{1}{2}a)^2}{r}$, y sustituido en............ $sen\ a = (r^2 - cos^2 a)$ que encontramos (266), tendremos dicho BD ó *sen a*.

273 Supongamos ahora conocidos los senos $EF = a$, $DT = b$ (fig. 116) de los arcos AE, DE, y tratemos de encontrar el seno y coseno de su suma y de su diferencia. Si se toma EB=ED; será AB la diferencia de los arcos AE, DE: bajese el radio CE perpendicular á la cuerda BD; DM, TL, BG perpendiculares á CA, y tirando las paralelas TH, BK, será (118) DH:HK::KO:OB::BT:TD; esto es, DH=HK, KO=OB, así como DT=TB (51): luego el seno de DBA suma de los arcos propuestos será DM=MH+HD=TL+HD; el seno de la diferencia de dichos arcos BG=MK=HM−HK=TL−HD, el coseno de la suma CM=CL−LM=CL−TH, y el coseno de la diferencia CG=CL+LG=CL+TH.

El valor de estas lineas TL,HD:CL,TH; se saca de los triángulos CEF,CTL,DTH semejantes, donde CE:CT::EF:TL::CE:CT::CF:CL; CE:CF::DT:DH; CE:EF::DT:TH; ó poniendoles sus nombres, $r : cos\ b :: sen\ a : TL = \frac{sen\ a.\ cos\ b}{r}$; $r : cos\ b :: cos\ a : CL = \frac{cos\ a\ cos\ b}{r}$; $r : cos\ a :: sen\ b : DH = \frac{sen\ b.\ cos\ a}{r}$, $r : sen\ a :: sen\ b$:

$TH = \frac{sen\,a.\,sen\,b}{r}$. Luego.......

1.° $TL + HD = DM = sen(a+b) = \frac{sen\,a.\,cos\,b + cos\,a.\,sen\,b}{r}$.

2.° $TL - HD = BG = sen(a-b) = \frac{sen\,a.\,cos\,b - cos\,a.\,sen\,b}{r}$.

3.° $CL - TH = CM = cos(a+b) = \frac{cos\,a.\,cos\,b - sen\,a.\,sen\,b}{r}$.

4°. $CL + TH = CG = cos(a-b) = \frac{cos\,a.\,cos\,b - sen\,a.\,sen\,b}{r}$.

274 Supuesto que $tang = \frac{r.\,sen}{cos}$ (267); será $tang\,(a+b) = \frac{r.\,sen(a+b)}{cos\,(a+b)} = \frac{r(sen\,a.\,cos\,b + cos\,a.\,sen\,b)}{cos\,a.\,cos\,b - sen\,a.\,sen\,b} = \frac{r.\left(\frac{sen\,a}{cos\,a} \times \frac{sen\,b}{cos\,b}\right)}{1 - \frac{sen\,a}{cos\,a} \times \frac{sen\,b}{cos\,b}}$ dividiendo numerador y denominador por $cos\,a.\,cos\,b$. Pónganse ahora en lugar de............ $\frac{sen\,a}{cos\,a}$, $\frac{sen\,b}{cos\,b}$ sus iguales $\frac{tang\,a}{r}$, $\frac{tang.\,b}{r}$; y se tendrá por último, $tang\,(a+b) = \frac{r^2\,(tang\,a + tang\,b)}{r^2 - tang\,a.\,tang\,b}$. Y por lo mismo será $tang.\,(a-b) = \frac{r^2\,(tang\,a - tang\,b)}{r^2 + tang\,a.\,tang\,b}$

275 De la espresion $cotang = \frac{r.\cos}{sen}$ (268) sacarémos $cotang\ (a+b) = \frac{r.\cos(a+b)}{sen(a+b)} = \frac{r(\cos a.\cos b - sen\ a.\ sen\ b)}{sen\ a.\cos b + \cos a.\ sen\ b} = \frac{r\left(1 - \frac{sen\ a.\ sen\ b}{\cos a.\cos b}\right)}{\frac{sen\ a}{\cos a} + \frac{sen\ b}{\cos b}} = \frac{r^2 - tang\ a.\ tang\ b}{tang\ a - tang\ b}$, partiendo por $\cos a.\cos b$, y sustituyendo $\frac{tang\ a}{r}$, $\frac{tang\ b}{r}$ en lugar de.... $\frac{sen\ a}{\cos a}$, $\frac{sen\ b}{\cos b}$. Como tambien $cotang\ (a-b) = \frac{r^2 + tang\ a.\ tang\ b}{tang\ a - tang\ b}$

276 Ultimamente, siendo (267) $secante = \frac{r^2}{\cos}$; tendrémos $secant\ (a+b) = \frac{r^2}{\cos(a+b)} = \frac{r^3}{\cos a.\cos b - sen\ a.\ sen\ b} = \frac{r^2 \times r^2}{r(\cos a.\cos b - sen\ a\ sen\ b)}$ multiplicando por r: multiplíquese y pártase el denominador por $\cos a.\cos b$, y resultará $secant(a+b) = \frac{r^2 \times r^2}{(r.\cos a.\cos b) \times \left(1 - \frac{sen\ a}{\cos a} \times \frac{sen\ b}{\cos b}\right)} = \frac{r.\ sec\ a.\ sec\ b}{r^2 - tang\ a.\ tang\ b}$, poniendo $secant$ y $tang$ en lugar de sus iguales $\frac{r^2}{\cos}$ y $\frac{sen}{\cos}$ (267): y por

igual razon $sec\ (a-b) = \frac{r.\ sec\ a.\ sec\ b}{r^2 + tang\ a.\ tang\ b}$. El mismo cálculo con corta diferencia nos dará $cosec\ (a+b) = \frac{r^2}{sen\ (a+b)}$ (268) $= \ldots\ldots$ $\frac{r^3}{sen\ a.\ cos\ b + cos\ a.\ sen\ b} = \frac{r^2 \times r^2}{(r\cdot cos\ a.\ cos\ b \times (\frac{sen\ a}{cos\ a} + \frac{sen\ b}{cos\ b})}$ $= \frac{sec\ a.\ sec\ b}{tang\ a + tang\ b}$: y $cosec (a-b) = \frac{sec\ a\ sec\ b}{tang\ a - tang\ b}$.

277 Si en las espresiones $sen\ (a+b)$, $cos\ (a+b)$ &c. suponemos $a=b$, $a=2b$, $a=3b$ &c. resultarán los valores de los senos, cosenos, tangentes &c. de los arcos duplos, triplos &c. Si suponemos $b=a$ y $r=1$; será $sen (a+b) = sen\ 2a = 2\ sen\ a.\ cos\ a$: $cos\ (a+b) = cos\ 2a = cos^2 a - sen^2 a$; $tang.\ (a+b) = tang\ 2a = \frac{2\ tang\ a}{1 - tang\ a}$: haciendo $b=2a$, se tendrá $sen\ 3a = sen\ a.\ cos\ 2a + cos\ a.\ sen\ 2a$: $cos\ 3a = cos\ a.\ cos\ 2a - sen\ a.\ sen\ 2a$, y así de las demas.

278 Si suponiendo $r=1$, se suman las espresiones número 1.° y 2.°, y las número 3.° y 4.° (271); resulta $sen\ (a+b) + sen\ (a-b) = 2\ sen\ a.\ cos\ b$, $cos\ (a+b) + cos\ (a-b) = 2\ cos\ a.\ cos\ b$: y haciendo $a+b=p$, $a-b=q$, en cuyo caso $a = \frac{1}{2}(p+q)$, $b = \frac{1}{2}(p-q)$; $sen\ p + sen\ q = 2\ sen \frac{1}{2}(p+q) \times cos \frac{1}{2}(p-q)$; $sen\ p - sen\ q = 2\ sen \frac{1}{2}(p-q) \times cos \frac{1}{2}(p+q)$; $cos\ p + cos\ q = 2\ cos \frac{1}{2}(p+q) \times cos \frac{1}{2}(p-q)$; $cos\ q - cos\ p = \ldots 2\ sen \frac{1}{2}(p+q) \times sen \frac{1}{2}(p-q)$.

279 Si se dividen ahora estas fórmulas las unas por las otras, se tendrá.........................

$$\frac{senp+senq}{senp-senq}=\frac{sen\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q)}{\cos\frac{1}{2}(p+q)\,sen\frac{1}{2}(p-q)}=tang\frac{1}{2}(p+q)\times\cot\frac{1}{2}(p-q)=\frac{tang\frac{1}{2}(p+q)}{tang\frac{1}{2}(p-q)}\ (269).$$

$$\frac{senp+senq}{\cos p+\cos q}=tang\frac{1}{2}(p+q);\ \frac{senp-senq}{\cos p+\cos q}=tang\frac{1}{2}(p-q);\ \frac{senp+senq}{\cos q-\cos p}=\cot\frac{1}{2}(p-q);\ \frac{senp-senq}{\cos q-\cos p}=\cot\frac{1}{2}(p+q);\ \frac{\cos p+\cos q}{\cos q-\cos p}=\cot\frac{1}{2}(p+q).\cot\frac{1}{2}(p-q):$$

con otras muchas que se pueden sacar. Las primeras sirven para trasformar los productos de los senos en senos simples; las segundas para sustituir á las sumas ó diferencias de los senos los productos de otros senos, y las terceras, las tangentes y cotagentes á los senos y cosenos.

280 Las proposiciones establecidas ya bastan para la construccion de las tablas de los senos (265): pues considerando de 1000000 partes al radio, cuerda de 60° (112); tendrá el seno de 30° que es su mitad (260), 500000: y buscando sucesivamente los senos de la mitad (269), sacaremos por el de 30° el valor de los senos de 15°, 7°30', 3°45', 1°52'30'' hasta el de 52''44'''3''''¾ que por su pequeñez se confunde ya con su arco. Por lo mismo tanto él como el de 1' serán sin error sensible proporcionales con sus arcos: y

podremos decir, *el arco de* $52''44'''3''''\frac{3}{4}$ *es á su seno encontrado, como el arco de* 1′ *es á su seno.* Conocido por esta proporcion el valor del seno de 1′, sacarémos el de 2′,4′,8′ &c. (270), el de 1′+2′=3′ (271), 3′+2′=5, el de 10′, 20′, 30′, 60′, ó el de 1°; y con él se sacarán del mismo modo los de los senos restantes hasta 45°. Los demas hasta 90° son sus cosenos, y su valor se encuentra segun digimos (266): y con los senos y cosenos se sacan (267 y 268) los valores de las tangentes y cotangentes.

281 Las tablas que acabamos de enseñar á construir, en lugar de los valores de los senos, cosen. tang. suelen contener solo sus logaritmos para mayor comodidad en los cálculos; pero logaritmos sacados por los antiguos geómetras que consideraban al radio dividido en 1000000000 partes. Los modernos suponiendo el radio de 100000, han omitido en los valores de los senos, tangentes &c. las cuatro últimas cifras y algunos cinco, por no necesitarse tanta exactitud; pero han dejado los logarítmos conforme los sacaron los antiguos. El que solo tenga tabla de los logarítmos de los senos, y quisiese sacar por ellas el valor de un seno v. gr. el de 18° 6′; debe rebajar seis unidades de la característica de su logarítmo 9,4923083, y buscando 3,4923083 en los logarítmos de los números naturales, le hallará entre 3106 y 3107, y cualquiera de ellos

será con poca diferencia el valor del seno de 18°6'.

282 Habiendo manifestado ya cómo los senos equivalen á los ángulos, vamos ahora á demostrar *que en cualquier triángulo los senos de los ángulos son proporcionales á sus lados opuestos*. Inscripto en un círculo un triángulo cualquiera ABC (fig. 37), siendo cada uno de sus lados cuerda de un arco duplo del que mide el ángulo opuesto (67); será la mitad de cada lado el seno del ángulo opuesto: esto es, AP será seno del ángulo B, AN seno de C, y BH seno de A: luego siendo los lados proporcionales á sus mitades, lo serán de consiguiente á los senos de los ángulos opuestos; de suerte que será AB:*sen*C::AC:*sen* B::BC:*sen* A.

283 En el triángulo rectangulo ABD (fig. 117) *es tambien el seno del ángulo recto* D (que es el radio ó *r*), *á la hipotenusa* AB; *como el seno* A *al lado* BD, *y como el seno* B *al lado* AD: y pues tomando á BD por radio, es AD tangente del ángulo B (262), y siendo AD radio es DB tangente del ángulo A; será BD:AD::*r*:*tang* B, y AD:DB::*r*:*tang* A.

284 En cualquier triángulo ACB (fig. 118) *la suma de los dos lados* BC+AC *que comprende el ángulo* C, *es á su diferencia* BC—AC; *como la tangente de la mitad de la suma de los otros dos ángulos* A, B, *es á la tangente de la mitad de la diferencia*

de estos ángulos: ó BC+AC:BC—AC:: *tang* $\frac{1}{2}$(A+B): *tang* $\frac{1}{2}$(A—B).

Para demostrarlo descríbase un círculo desde C con el intervalo del lado menor AC, y tiradas las dos cuerdas AE, AD, y la DF paralela á AE; será el ángulo *t* mitad de los ángulos A y B, por ser *z*=A+B (84); y *t* mitad de z (68): el ángulo DAB es la semidiferencia de A—B de dichos ángulos (238 *t.* I); porque DAB con el ángulo *o*=*t* que es su semisuma, compone el ángulo A el mayor de A y B; luego siendo EAD ángulo recto (69), y lo mismo su igual ADF (45); será tomando á DA y AF por radios, EA tangente del ángulo *t*=$\frac{1}{2}$(A+B), y DF tangente de DAF=$\frac{1}{2}$(A—B): y como por las paralelas EA, DF se tiene BE: BD::EA:DF, y BE=BC+AC, BD=BC—CD=BC—AC; saldrá por último, BC+AC:BC—AC:: *tang* $\frac{1}{2}$(A+B):*tang* $\frac{1}{2}$(A—B). Conocida la semisuma y semidiferencia de los ángulos A y B, se averigua facilmente el valor de cada uno (101 *t.* I).

285 Finalmente, *en cualquier triángulo* ABC (fig. 119 y 120) *el lado* BC *sobre el cual ó sobre cuya prolongacion cae la perpendicular* AD, *es á la suma* AC+AB *de los otros dos; como su diferencia* AC—AB *es á la diferencia* DC—BD *de los segmentos hechos por la perpendicular* AD, *ó á su suma* DC+BD *si la perpendicular cae fuera.* Porque trazando un círculo desde A con el radio AB, y alar-

gando AC hasta T; será (143) CB:CT::CR:CE, y como CT=AC+AB, CR=AC−AB, y CE=DC−DB por ser BD=DE: se tendrá sustituyendo estos valores, BC:AC+AB::AC−AB:DC−DB: y en la (fig. 120) donde CE igual es á CD+DE=CD+DB, sale BC:AC+AB::AC−AB:CD+DB. Conocida la suma y diferencia de los segmentos, se averigua su valor (101 *t.* I)

ARTÍCULO II

Usos del cálculo trigonométrico en la resolucion de los triángulos rectángulos y oblicuángulos

286 Con las proposiciones anteriores se pueden resolver los cuatro casos diferentes en que con arreglo á lo dicho (257), dadas tres cosas de las seis que componen un triángulo se pida el valor de las otras tres.

287 Y comenzando por el triángulo rectángulo, si ademas del ángulo recto D (fig 117) que se conoce, se diese 1.° uno de los ángulos agudos B y el lado BD; harémos (281) *r*: *tang* B::BD:AD para averiguar el lado AD. 2.° Si se diese la hipotenusa AB y uno de los ángulos agudos A: haciendo *r*: AB::*sen* A:BD, se conocerá el lado BD. 3.° Con el lado BD y la hipotenusa AB, tendremos AB:*r*::DB:*sen* A; y se habrá averiguado el ángu-

lo A. 4.° Dados los lados DB, AD; se hará AD: DB::*r*:*tang* A; y se tendrá el ángulo A.

288 En los triángulos oblicuángulos ó que no tienen ángulo recto, 1.° conocido uno de los lados AB (fig. 121) y los dos ángulos C y B, será A lo que les falta para 180° (86): y se averiguará el valor de los lados AC y CB por las dos proporciones siguientes (280), *sen* C: AB::*sen* B:AC::*sen* A:BC. 2.° Dados los dos lados AC, CB (fig. 118) y el ángulo C comprendido; se hará (282) CB+AC:CB—AC:: *tang* ½ (A+B) : *tang* ½ (A—B): conocida la diferencia de A y B, como se conoce su suma que con C compone 180° (86): se averiguará lo que vale cada uno (101 *t.* I).

289 3.° Cuando se dan los lados AB, BC (fig. 121) y el ángulo A: se hace BC:*sen* A:: AB:*sen* C: conocidos C y A y de consiguiente su suplemento B, se averiguará AC diciendo *sen* C:AB:: *sen*B:AC. Si con los lados AB, BC se hubiese dado el ángulo C, hubiéramos hecho la proporcion AB:*sen*C::BC *sen* A.

290 Pero como tirándo la BT=AB, resulta otro triángulo BTC con los mismos tres datos BT ó AB, BC y C, donde BT:*sen* C:: BC:*sen* BTC; se infiere que á dichos datos AB,BC y C corresponde por 4.° término proporcional ó el seno del ángulo obtuso BTC o el del ángulo agudo A=BTA complemento de BTC: que aunque el mismo en ambos (264), no lo es el tercer lado AC, TC de los

dos triángulos: por lo que cuando se den en un triángulo oblicuángulo dos lados AB, BC y el ángulo C opuesto al menor AB; se necesita saber ademas, si el ángulo opuesto al otro lado es el agudo A, y entonces se tratará del triángulo ABC, ó es el obtuso BTC, y será BTC el triángulo de que se habla.

291 4.° Si se diesen los tres lados AB, AC BC (fig. 119), y se pidiesen los ángulos; sacarémos de la proporcion (283) BC:AC+AB:: AC−AB:DC−BD, la diferencia de los segmentos que forma una perpendicular bajada desde A sobre BC, suma conocida de dichos segmentos: luego conocerémos el valor de cualquiera de ellos por eg. el de DC: y en el triángulo rectángulo ADC conocida la hipotenusa y el lado DC, se averiguará el ángulo C (285), y de consiguiente (287) A y B.

Sea AC=180P. AB=128, BC=200; tendrémos 200: 180+128::180−128:DC−BD=EC, esto es, 200:308::52:EC=80 poco mas. Con esta diferencia de los segmentos BD, DC y su suma que es el lado BC, tendrémos el valor de cualquiera de ellos BD=½(200−80)=60: y en el triángulo rectángulo ABD donde conocemos AB, BD; averiguarémos el ángulo B (285) y por él, los otros A y C.

292 Vamos á aplicar esta doctrina á algunos egemplos, en los que usarémos para abreviar el cálculo en lugar de los números, senos, cosenos, tangentes &c. de sus logarítmos, y

aun del complemento aritmético como no sea en el caso de haberse de hacer la resta del logarítmo del radio, que siendo 10,000000, se escusa dicha abreviacion.

293 Háyase de medir 1.° la altura AB (fig. 122) acesible por uno de sus estremos A. Puesto el grafómetro en un sitio inmediato M, y colocado verticalmente ó de suerte que su diámetro quede paralelo al suelo llano por medio de un hilo *ct* con un plomo, que colgando de su centro debe pasar por los 90°; diríjase por el diámetro inmobil el rayo visual *p*D, y por el mobil el *q*B á la cumbre de la altura: vease cuántos grados coge en el instrumento el ángulo *pca*, y estos mismos tendrá su vertical BeD. Medida despues la distancia MN=*c*D, como BN es perpendicular al suelo y de consiguiente á *c*D, será BD*c* un triángulo rectángulo, en el que si el lado *c*D que se conoce, es de 456 *v.* y el ángulo observado BcD de 56° 12′, se sacará el otro lado BD (281) por la proporcion *r:tang* BcD=56° 12′::cD=456: DB que se encuentra de 681 *v.* por el siguiente cálculo de logarítmos.

Log. tang 56° 12′..................	10,174287
Log. 456..................................	2,658965
Suma..	12,833252
Log. del radio.......................	10,000000
Resta ó Log. BD...................	2,833252

añádasele DN ó la altura del grafómetro, y se tendrá la AB que se pide.

294 Si BD fuera la altura conocida de una muralla, y se pidiese la longitud de *c*B para escalarla; despues de haber buscado el ángulo B*cd* haciendo *c*D:DB::*r*:*tang* BcD; haríamos BD:*sen* BcD::*r*:Bc. Mas facil es cuadrar el valor de *c*D y BD, y sacar de su suma la raiz cuadrada que será la longitud de *c*B porque $cB=\sqrt{((cD)^2+(BD)^2)}$ (141).

295 En estas y semejantes prácticas conviene colocar el grafómetro á una distancia casi igual á la que se va á medir, para que sea menor el error que por lo comun se comete al tomar el ángulo de la altura, que será entonces de 45°. Por egemplo, si midiendo la altura GD (fig. 123), se toma en el punto F el ángulo ZFT en lugar del verdadero GFT, y en E el KET por el verdadero GET: aunque la equivocacion ó los ángulos GEK y GFZ se supongan iguales, es mayor la parte GZ en que la observacion disminuye la altura en F, que GK que sale de ménos en E.

296 Supongamos ahora que se nos pida medir una linea AB (fig. 124) acesible solamente por sus estremos, como el ancho de una laguna, bosque, rada &c. En este caso se ha de escoger un punto C desde donde se puedan tirar las lineas CA, CB; y suponiendo que se puedan medir, sea AC=142P, BC=120, y C=132°: y será B+A=48°: harémos pues

Log. tang 24°........................ 9.648583
Log. 22.. 1.342423
Comp. Log. 262........................... 7.581699

Suma ó Log. tang ½ (B—A)...18,572705

(286), 142+120:142—120::*tang* 24°: *tang* ½(B—A), ó 262:22::*tang* 24°: *tang* ½(B—A), que calculada por los logaritmos es de 2°8′. Luego (101 *t.* I) el ángulo B valdrá 24°+2°8′=26°8′, y A 24°—2°8′=21°52′.

Con los ángulos B, A se encontrará despues la AB por la proporcion siguiente *sen* B: AC::*sen*C:AB, ó *sen* 26°8′: *sen* 132°::142:AB: que buscada por los logaritmos resulta de 235,6 P.

297 Si no hubiese sitio desde donde se puedan ver los dos puntos A, B (fig. 125): se elegirán dos C, D tales que sea facil medir las BC, CD, DA y los ángulos C, D que convendrá sean rectos: imaginando despues la BD, resultará un triángulo BCD donde conocidos BC, CD y el ángulo comprendido, se averiguará BD como acabamos de decir. Conociendo ya en el otro triangulo ADB AD, DB y el ángulo ADB diferencia entre BDC y ADC; se averiguará por último la AB.

298 Tratemos ya de medir una linea inacesible AB (fig. 126): para lo cual despues de haber escogido y medido una base CD que se procura hacer casi igual y paralela á AB, se tirarán las visuales CA, CB, DA, DB, y des-

pues de haber medido los ángulos que forman en C, D, se averiguarà (286) el valor de CB en el triángulo CBD, donde el lado CD y los ángulos BCD, CDB son conocidos: del mismo modo se averiguará AC en el triángulo ACD. Con AC y BC conocidos, ademas del ángulo ACB que forman, que es la diferencia de los ángulos ACD, BCD observados; se sacará por último en el triángulo ACB el valor de AB por lo dicho (286).

En el caso de no encontrarse un punto C desde donde se vean los dos A, B; se tirará una recta CE (fig. 127) tal que desde E se alcancen á ver dichos puntos: se imaginarán despues las visuales EA, EB, CB, ED, DA y DB: y medidos los ángulos en E, D y la base CE, se hallará facilísimamente la AB, cuidando siempre de no formar jamas ángulos muy agudos en los puntos inacesibles.

299 Si la linea inacesible fuese la altura vertical AB (fig. 123); observaremos en el sitio H el ángulo A*c*C, mediremos despues un trecho HP, y tomando en P el ángulo A*tc*; tendremos conocidos en el triángulo A*tc* los ángulos *ct*A, y A*ct* suplemento del observado A*c*C, con el lado *tc*=PH: luego podremos averiguar A*c* (286). Pasando ahora al triángulo rectángulo A*c*C donde sabemos el valor de la hipotenusa A*c* y el del ángulo A*c*C: tendremos el de AC por la proporcion *r*:A*c*::*sen* A*c*C:AC.

Log. sen 35°40′.................... 9,765720
Log. 576................................. 2,760422
Suma..................... 12,526142
Log. r....................................10...................

Resta ó Log. AC.................... 2,526142

Sea A*e* de 576 *v.* y el ángulo A*e*C de 35°40′: será *r*: 576:: *sen* 35° 40′: AC, que se encuentra de 335,8 *v.* á las que si se añade CB ó la altura del instrumento, resultará la AB que se busca.

300 Para medir la distancia AB (fig. 128) de una nube ó cuesta inaccesible; se mide una base AC, y observando en el triángulo ABC los ángulos A y C, se averiguan AB y BC(286). Si se dirige despues con el grafometro colocado verticalmente, una linea AD paralela al suelo llano que se llama *orizontal*, en el triangulo rectángulo ABD, donde la hipotenusa AB es conocida, y el ángulo BAD se puede medir; se hallará facilmente la altura BD de la montaña y la distancia orizontal AD (285).

301 Háyase de levantar el plano de un terreno ACDBE &c. (fig. 129) ó determinar la situacion de todos sus puntos principales. Despues de haberlos recorrido, y formado á ojo un borrador de todos para hacer juicio de su situacion; mídase una base AB de una distancia proporcionada á la de los objetos mas remotos, y tal que desde sus estremos se registren los mas principales, como casas, huertas,

molinos, torres &c. Póngase el grafómetro en B, y colocando el diámetro inmobil en la direccion AB; obsérvense los ángulos ABE, ABF, ABG, ABD, ABC que con él forman los rayos dirigidos á los objetos E, F, G &c. Mudese ahora el instrumento á A; y haciendo que el diámetro inmobil se dirija á B, se tomarán tambien los angulos BAE, BAF, BAG, BAD &c. que se anotarán con los anteriores en un *libro de memorias.*

Escójase despues otra base GE para determinar los objetos R, H, K que ó no se ven desde A y B, ó forman en ellos ángulos muy agudos ó muy obtusos: y desde sus estremos G, E obsérvense como los anteriores los ángulos EGK, EGR, EGH; GEK, GER, GEH; y si es menester los LCD, LDC para determinar algun otro punto L muy estraviado, escribiéndolos todos con los ya observados.

Tendremos pues, en los triángulos AEB, AFB, AGB &c. el lado AB y los ángulos adyacentes conocidos; y de consiguiente será facil calcular los otros dos lados (286). Tambien se averiguará el valor de GE por medio del triángulo GEB, cuyos lados GB, BE se conocen ya, lo mismo que el ángulo GBE comprendido, que es la diferencia entre los observados ABG, ABE. Con GE y los ángulos adyacentes observados se buscan en los triángulos GKE, GRE, GHE sus lados, haciendo lo mismo con los del triángulo CDL.

Hecho esto, se tirará en el papel una linea *ab* que tenga tantas partes de la escala que ha de determinar el tamaño del *plano*, como varas ó pies tiene AB en el terreno, y tomando en dicha escala un intervalo de tantas partes como varas ó pies tiene BE; se trazará desde *b* como centro un arco. Con otro espacio de tantas partes como varas ó pies tiene AE, se traza otro arco desde *a*, que cortará al primero en el punto *e*, cuya posicion respecto de *ab* quedará determinada en el papel, semejante á E respecto de AB. Determínense de este mismo modo los puntos *g*, *f*; *c*, *d*; y se habrán representado los G, F, C, D. Los K, R, H, L se deben determinar en el papel desde las bases *ge*, *cd*, trazando desde sus estremos arcos con el intervalo de tantas partes como varas ó pies corresponden á GK, EK; GR, RE &c. y quedará trazada en el papel una figura semejante á la del terreno (150); pues se compondrá de igual numero de triángulos semejantes y colocados del mismo modo que ella: con que solo faltará dibujar en cada punto los objetos que en ellos se representan.

302 Tambien se pudieron determinar los puntos de la figura despues de haber observado los angulos, en A, B, G, E, C, D, tomando la *ab* como digimos, y formando en *a* y *b* por medio del semicirculo (24), los angulos *abe*, *abf*, *abg*, *abd*, *abc*; *bae*, *baf*, *bag*, *bad*, *bac* iguales á los observados en A y B; en *g* y

e tirando la *gc*, los *gek*, *ger*, *geh*; *cgk*, *cgr*, *cgh*; y en *c*, *d*, los *cdl*, *lcd* iguales á los medidos en G, E, C, D; pues los triángulos que resultan, son semejantes á los del terreno. Este método aunque ménos exâcto, ahorra el calcular los lados por la trigonometría, y por eso se puede usar de él cuando no son muy grandes las distancias á que están los puntos principales del plano.

303 Ademas de los medios que nos ofrece la trigonometría para medir toda clase de lineas; nos podremos tambien servir de los siguientes. 1.° La altura AB (fig. 122) pudo haberse medido fijando en el mismo plano de la torre un palo *ab* paralelo á dicho edificio, y diciendo despues, *la longitud ac de la sombra del palo es á su altura ab; como la longitud de la sombra* AC *es á* AB: pero cuidese, si el edificio termina en punta, añadir á la longitud de la sombra la mitad del diámetro del edificio, que es en lo que aparece mayor la sombra del edificio igual, que el que no lo es.

302 2.° Para medir la recta AB (fig. 130) acesible por uno de sus estremos A; se plantará un piquete en C, y sobre él orizontalmente un estadal con dos reglas pequeñas en sus estremos D, A: dirijanse con ellas al punto B los rayos visuales AB, DB: muevase el piquete al rededor, llevando inmobles las reglas hasta que quede en la direccion *ad*, y

midiendo *ab*, ó lo que hay de *a* á *b* punto donde concurren los rayos *db*, *ab*; se tendrá el valór de AB. Este método que es bastante exâcto en cortas distancias, se aplica á medir cualesquiera otras lineas, verticales ú *orizontales* (306), colocando el estadal y las reglas segun el caso lo requiera.

305 3º Habiéndose de medir la linea AB (fig. 131); tirada la base AC en sitio cómodo para medirse, y dirigiendo la CB; se tendrá un triángulo ACB con un lado AC, y los ángulos adyacentes conocidos: cuyo lado AB se calculará, ó formando en CA, los ángulos *b* CA, CA *b* iguales á BCA, CAB y entonces será A*b*=AB; ó tirando sobre un papel una recta *ac* del mismo número de partes de una escala que AC tiene de varas ó pies, y formando sobre ella un triángulo *abc* semejante á ABC: en cuyo caso el número de partes de la escala de que conste *ab*, será el de las varas ó pies que tiene AB.

306 4.º Cuando la linea AB propuesta tiene una parte AD acesible; tirada AC que supondremos de 30 *v.* se formará, tomando á arbitrio la A*c* de 10 *v.* el ángulo A*c*D=ACB, y midiendo AD, si tiene 12 *v.* formarémos la proporcion A*c*=10 *v*: AC=30 *v*: : AD=12 *v*: AB, que resulta de 36. Si AB no tiene parte acesible, se alargará AC hasta que AT sea de 10 *v.* y formando el ángulo AT*d*=ACB, se hará dicha regla de tres. Siempre conviene ha-

cer á Ac el tercio ó el cuarto de AC, y con eso será AD el tercio ó cuarto de AB: como tambien tomar á AC igual con poca diferencia á AB; lo que se logrará apartando tanto el punto C que el ángulo BCA sea la mitad del suplemento del ángulo A; pues siendo entonces ACB=ABC, será AC=AB (37).

ARTÍCULO III

DE LA NIVELACION

307 Concluyamos este tratado dando alguna idea de los métodos de *nivelar* un terreno. Para esto supondremos 1.° que á razon de 56979 toesas ó 132951 v. castellanas en que se puede regular cada grado de círculo máximo de la tierra; corresponderán á toda la circunferencia 56979×360°=20512440 toesas ó 47862360 v; al diámetro 6526685 toesas ó 15228932 $\frac{1}{3}$ v; al radio 3263342 $\frac{1}{2}$ toesas ó 7614466 $\frac{1}{3}$ v; á un minuto 950 toesas ó 2216 v: y á un segundo 16 toesas que son 37 v: todo en la suposicion de que la tierra sea perfectamente esférica; pues aunque en realidad es ovalada, es insensible el error de dicho supuesto para la nivelacion.

308 2.° Que una linea A*d* (fig. 132) cuyos puntos A, *c*, *d*, distan todos igualmente del centro O de la tierra, como la paralela á la superficie de un gran lago; se llama linea

orizontal y de *nivel verdadero*, á diferencia de la que se encuentra nivelando, que en la distancia Ad es la tangente Ac, que se llama *linea de nivel aparente.* La diferencia Cd entre las dos, ó lo que dista mas de O el punto C que d, es casi nula á la corta distancia de 100 á 130 toesas, por la mucha estension de la superficie de la tierra; pero en mayores distancias se debe apreciar y restar de la que haya resultado en la operacion.

309 Podremos sacar el valor de esta diferencia considerando la distancia Ac igual á la tangente AB, y como BR:AB::AB:Bc (144), suponiendo que el arco Ac se confunda por su pequeñez con la tangente AB, será BR lo mismo que cR, y cR:Ac::Ac:Bc; póngase el valor de cR diámetro de la tierra (305), y el de la distancia Ac, y se tendrá la diferencia Bc; y por ella cualquiera otra Cd: pues siendo Bc, Cd casi paralelas é iguales á Aa, Ab, que son entre sí como los cuadrados de las cuerdas ó arcos Ac, Ad (266), tendrémos $(Ac)^2:(Ad)^2::Bc:Cd$, y así de las demas. La siguiente tabla formada por *Mrs. Picard* y de la *Hire* contiene las diferencias de nivel aparente y verdadero hasta 4000 toesas.

DISTANCIAS. Toes. Pies. Pulg. Lin.	DISTANCIAS. Toes. Pies. Pulg. Lin.	DISTANCIAS. Toes. Pies. Pulg. Lin.
50....0...0...0$\frac{1}{3}$	500...0...2....9	1000..0..11..0
100....0...0...1$\frac{1}{3}$	550. .0...3....6	1250...1...5..2$\frac{1}{2}$
150....0...0...3	600...0...4... 0	1500...2...0..9
200....0...0...5$\frac{1}{3}$	650...0...4....8	1750...2...9..8$\frac{1}{2}$
250....0...0...8$\frac{1}{3}$	700...0...5....4	2000...3...8..0
300....0...1...0	750...0...6....3	2500...5...8..9
350....0...1...4$\frac{1}{3}$	800...0. .7....1	3000...8...3..0
400....0...1...9$\frac{1}{3}$	850...0...7..11$\frac{1}{2}$	3500..11.2..9
450....0...2...3	900...0..8...11	4000..14.8..0
	950...0..10...0	

310 Esto supuesto, para la operacion de nivelar usan los prácticos de diferentes instrumentos. Los mas comunes son 1.° el *nivel de ayre* (fig. 133), que es un tubo lleno de espíritu de vino ménos una ampolla de ayre A, que debe estar perfectamente en medio, para que el sitio que ocupa el instrumento, esté á nivel. 2.° El *nivel de albañil* (fig 134) es un triángulo isósceles sin base con un cuadrante de círculo entre sus lados, y una linea perpendicular tirada desde su vértice á la base y señalada en el cuadrante. Del estremo superior de esta linea cuelga un hilo con un plomo, que pasando por el cuadrante, determina en grados la cuantidad de inclinacion del plano que se nivela, ó pasa por dicha linea si el plano está á nivel.

311 3.° El nivel de mas uso es el *de agua* (fig. 135) compuesto de un tubo hueco de hoja de lata ú otro metal doblado en A y B, en cuyos estremos *c* y *t* se introducen otros dos tubos de vidrio D, C pegados con betun en *e* y *t*: tiene debajo y en medio del tubo AB una virola para colocarle en su pie. Lleno el tubo de agua hasta que llegue en los dos pequeños á la altura de 2 á 3 *pulgadas*, la linea *ct* que pasa por la superficie del agua, es perfectamente orizontal. Acompaña al nivel el estadal HG dividido en pies, pulgadas y lineas, con un rebajo en el medio, en el que se intruduce una regla, á la que se fija un carton ú hoja de lata TF de un pie en cuadro poco mas ó menos, cuya mitad inferior se tiñe de negro, dejando blanca la superior.

312 Si se quisiese saber lo que dista mas del nivel verdadero el punto G que Z; se colocará el instrumento en E, perpendicular al terreno por medio del hilo de plomo H, se enviará un peon á G que clavando el estadal perpendicular, y teniéndole fijo con la mano izquierda, suba ó baje con la derecha segun le avise el que mira desde *c*, hasta asegurarle en T donde remata el rayo visual *t*T. Midase ahora la altura GT que supongo de 2 *pies* y 7 *pulg.* y restándola de la del instrumento que por lo comun es de 4 *pies* y 6 *pulg.*; resultarán 1 *pie* y 11 *pulg.*, en que el punto G está mas elevado que Z sobre el orizonte. Si

la distancia ZG no pasa de 750 *pies*, se desprecia la diferencia entre el nivel aparente y verdadero: pero si es mayor, se cuenta con ella, y se repite la operacion nivelando de cada vez 1400 ó 1500 *pies*.

313 Háyanse por eg. de nivelar los puntos A y H (fig. 136) distantes uno de otro 3000 *pies*. Pudiéndose nivelar de cada vez 1400 á 1500 *pies*, dividiré la operacion en dos estaciones: elegiré para ellas dos sitios á 750 *pies* uno, y á 2250 el otro del punto A: pongo en el medio E de toda la distancia un estadal, y planto el instrumento en 1: miraré desde *a* hácia B, y haré notar y medir la altura AB que el rayo *ab*B señala, y que supongo de 8 *pies* 5 *pulg.*: miro despues por *b* á C, y mando señalar este punto con un lapiz. Paso el nivel al punto 2, y mirando desde *d* á D, mediré la altura DC de 4 *pies*, haciendo notar ó escribir á parte la altura HF de 5 *pies* 3 *pulg.*, que se determina mirando de *c* á F. Sumo ahora las alturas AB, DC encontradas, y restando de su suma 12 *pies* 5 *pulg.*, el valor 5 *pies* 3 *pulg.* de HF: tendré de residuo 7 *pies* 2 *pulg.*, que es en lo que el punto A está mas bajo que H.

314 Si hubiese cuestas en la operacion, convendrá poner separadas en una coluna que llamarémos *primera*, las distancias que se encuentran subiendo, y en otra *segunda* las que se encuentren bajando, para restar despues la

suma de las unas de la de las otras. Y así continuando la nivelacion del egemplo anterior hasta el punto Z; apuntaré en la 1.ª coluna las alturas halladas AB, DC, y pasando el nivel al punto 3, miraré por *f*, *e* y G, y haciendo medir GF de 3 *pies* 6 *pulg.*, lo apuntaré en la 1.ª coluna, determinando tambien desde *e* el punto I. Plantado el nivel en 4, determinará el rayo *q*K la KI de 3 *pies* 3 *pulg.*, que escribiré en la 2.ª coluna por ser bajada, como tambien la altura 4 *pies* 6 *pulg.* del instrumento colocado en 5, á cuyo pie va á dar el rayo *yh* haciendo al mismo tiempo señalar el punto M á donde se dirige *hy*.

Paso á 6, y escribo en la 2.ª coluna 2 *pies* á que equivale MN determinada por el rayo *ik*, señalando tambien el punto P. Ultimamente, pongo en la 1.ª coluna las alturas QP de 4 *pies* 1 *pulg.*, y TS de 6 *pies* 5 *pulg.*, que se encuentran como las otras colocando sucesivamente el instrumento en 7 y 8, y la XZ de 3 *pies* 2 *pulg.* en la 2.ª Sumando ahora las alturas de la 1.ª coluna, tendré 26 *pies* 5 *pulg.*: resto de ellas 12 *pies* 11 *pulg.*, suma de las de la 2.ª y resultan 13 *pies* 6 *pulg.*, que dista mas del centro de la tierra Z que A. Las cuestas demasiado empinadas se nivelan mas facilmente comenzando desde la cumbre, y de este modo pueden nivelar dos á un tiempo para acabar mas pronto la operacion.

CAPITULO IV

Aplicacion del Algebra á la Geometría.

ARTÍCULO I

Construccion de las ecuaciones de 1.º y 2.º grado

315 Para la resolucion completa de los problemas geométricos por medio del álgebra; es preciso saber antes representar en líneas las espresiones ó valores algébricos de las incógnitas que contengan. Esplicaremos esta operacion que se llama *construccion*, en los egemplos siguientes. Sea $x=a+b-n$, donde a represente la linea A (fig. 137), b la B y n la C: tomo sobre una linea indefinida DH, la DO=A, la OT=B, y desde T hácia el lado opuesto la TS=n, y tendré DS=DO+OT−TS=$a+b-n=x$.

316 La espresion $x=\frac{ab}{c}$ representa una cuarta proporcional á c, a, b, pues $c:a::b:\frac{ab}{c}=x$: y $x=\frac{bb}{c}$ una tercera proporcional á c y b; por ser $c:b::b:\frac{bb}{c}=x$: luego si a, b, c representan las lineas o, n, m (fig. 57), y se practica lo que digimos (123 y 124); será

$bt=x$ la cuarta o la tercera proporcional. A esta misma operacion se reducen $x=\frac{abcd}{emn}$ haciendo $e:a::b:\frac{ab}{e}$, $m:\frac{ab}{e}::c:\frac{abc}{em}$, y últimamente, $n:\frac{abc}{em}::d:\frac{abcd}{emn}=x$. Aquí y en lo sucesivo damos por supuestas las operaciones geométricas que citamos.

317 Cuando hay dos ó mas términos, como en $x=\frac{cd}{m}+\frac{abc}{et}-\frac{r^2st}{a^2b}$ &c. se busca la linea á que equivale cada uno, y quedará reducida á una espresion semejante á esta $x=p+q-h$, facil de construir. Lo mismo se egecuta con $x=\frac{a^2b+cd^2+cde}{fg}$; esto es, se busca una linea $t=\frac{a^2b}{fg}$, otra $m=\frac{cd^2}{fg}$, y $n=\frac{dce}{fg}$, y resulta $x=t+m+n$.

318 En $x=\frac{abc+deb+\&c.}{ed-fg+\&c.}$ $x=$.................. $\frac{bc^2d-a^2np+\&c.}{a^2g+c^2m+\&c.}$, se reducen á monomios sus denominadores polinomios haciendo $t=$.......... $\frac{ed-fg}{e}$, $n=\frac{a^2g+c^2m}{ag}$ esto es, buscando una linea igual al denominador dividido por una de sus letras, ó por dos, segun el número de factores que contenga; pues siendo en tal

caso $et=cd-fg$, $agn=a^2g+d^2m$, se reducirán las espresiones propuestas á estas $x=\frac{abc+deb}{et}$, $x=\frac{bt^2d-a^3qp}{agn}$ que ya hemos enseñado á construir.

319 Hay construcciones mas espeditas para ciertas espresiones: $x=\frac{bd+ad}{c+e}=\frac{(b+a)d}{c+e}$ se construye haciendo $c+e:b+a::d:\frac{bd+ad}{c+e}=x$: $x=\frac{a^2-b^2}{g-f}=\frac{(a+b)(a-b)}{g-f}$, haciendo $g-f:a+b::a-b:\frac{a^2-b^2}{g-f}=x$. Para construir facilísimamente $x=\frac{bde^2-b^2d^2}{bde+e^3}$, introduciremos en el término b^2d^2 la linea e haciendo $\frac{bd}{e}=t$, ó $e:b::d:t$; pues será $bd=et$, y poniendo este valor en lugar de bd, se convertirá la espresion en esta $x=\frac{e^3t-e^2t^2}{e^2t+e^3}=\frac{et-t^2}{t+e}$, semejante á la primera.

320 Todas las espresiones anteriores tienen en su numerador un factor mas que en su denominador: pero si tuviesen dos como $\frac{a^3+a^2b}{d+c}=a\times\frac{a^2+ab}{d+c}$, se encontrará $\frac{a^2+ab}{d+c}=m$, y la espresion reducida á $a\times m$, se construirá formando un paralelogramo cuya base sea a, y m la altura. En $\frac{a^3+bc^2+d^3}{d+c}$ hay que intro-

ducir a en el 2.° y 3.^r término, haciendo $\frac{bc}{a}=m$ ó $bc=am$, y $\frac{d^2}{a}=n$ ó $d^2=an$, y quedará reducida á $\frac{a^2+amc+adn}{a+c}=a\times$.................... $\left(\frac{a^2+mc+dn}{a+c}\right)$ semejante á la anterior.

321 Cuando son tres los factores que hay demas, como en $\frac{a^3b+a^2b^2}{a+c}$, que es igual á $ab\times\frac{a^2+ab}{a+c}$ se hallará $\frac{a^2+ab}{a+c}=m$, y siendo ab un paralelogramo, si se le considera como base de un paralelepipedo cuya altura sea m, será su solidez $ab\times m$; y esta será la construccion de la espresion $\frac{a^3b+a^2b^2}{a+c}$.

322 Las cuantidades que tienen como las construidas un mismo número de factores en todos los términos, se llaman *homogeneas*: si alguna abc^2-a^2+abm no lo fuese, suponiendo que n sea la linea que representa la unidad; se multiplican los términos faltos $-a^2+abm$, el 1.° por n^2, y el 2.° por n, y resultará la espresion $abc^2-a^2n^2+abmn$ igual á la primera, y que ya se podrá construir por ser homogenea.

323 La espresion mas sencilla de las ecuaciones de 2.° grado es $x=\sqrt{ac}$, que es una media proporcional entre a y c: de suerte que suponiendo $m=a$ (fig. 65), $n=c$, será pro

cediendo segun digimos (145), la $bd = x = \sqrt{ac}$. Tambien $x = \sqrt{(2bc + dc)} = \sqrt{(2b + d)c}$ representa una media proporcional entre....... $2b + d$ y c; $\sqrt{(a^2 - b^2)} = \sqrt{(a + b)(a - b)}$ otra entre $a + b$ y $a - b$. En $x = \sqrt{(b^2 + dg)}$, introduciendo en dg la linea b, ó haciendo $dg = bt$; se tendrá $x = \sqrt{(b^2 + bt)} = \sqrt{(b + t)b}$, que es una media proporcional entre $b + t$ y b. Cuando la espresion consta de muchos términos como $x = \sqrt{(cd + ac - cb \text{ \&c.})}$ se procede del mismo modo; ó se busca como digimos (316), una linea $t = \frac{cd + ac - cb}{b}$, y será $bt = cd + ac - cb$, y $x = \sqrt{bt}$. En $x = \sqrt{\left(\frac{bc^2 - a^2g \text{ \&c.}}{d - c}\right)}$ se hace $t = \frac{bc}{d - c}$; $m = \frac{ag}{d c}$; y $\sqrt{(ct - am)}$ á que queda reducida, se construye facilísimamente.

324 Sea $x = \sqrt{(a^2 + b^2)}$: tómese CD $= a$ (fig. 138) y perpendicular á CD, la BD $= b$; será (141) la hipotenusa CB $= \sqrt{((\text{CD})^2 + (\text{BD})^2)} = \sqrt{(a^2 + b^2)} = x$. Si se hubiera dado $x = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \text{\&c.})}$; despues de hallada la CB $= \sqrt{(a^2 + b^2)}$, se levantará en B la perpendicular BA $= c$, y será CA $= \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}$: tírese despues la perpendicular AO $= d$, y se tendrá finalmente CO $= \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}$. Cuando hay algunos cuadrados negativos, se busca un cuadrado t^2 suma de los positivos, y otro m^2 suma de los negativos, y se reducirá la espresion á

$\sqrt{(t^2-m^2)}$, que se puede construir describiendo sobre la linea $ac=t$ (fig. 65) un semicírculo, en el que se inscribirá la linea $ab=m$; pues será (203) $bc=\sqrt{((ac)^2-(ab)^2)}=\sqrt{(t^2-m^2)}$. A esta y á la anterior construccion pueden reducirse las espresiones $x=\sqrt{(ab+cd+mn+\&c.)}$, $x=\sqrt{(ab-cd+mn-\&c.)}$, haciendo ántes $ab=t^2$, $cd=r^2$, $mn=p^2$ &c.

325 Si en $x=(b^2+\frac{a^2d^2+d^2c^2}{bd+ac})$ suponemos $bd+ac=m^2$, $a^2+c^2=t^2$: nos resultará $x=\sqrt{(b^2+\frac{d^2t^2}{m^2})}$; hágase despues $n=\frac{dt}{m}$, y quedará que construir $\sqrt{(b^2+n^2)}$. $\sqrt{(a^2-c\sqrt{(bd-e^2)})}$ se reduce, buscando $t=\sqrt{(bd-e^2)}$, á $\sqrt{(a^2-ct}$: y últimamente, $\frac{a\sqrt{(b+c)}}{\sqrt{(d+e)}}=\frac{a\sqrt{(b+c)(d+e)}}{d+e}$, se construye buscando una media proporcional n entre $b+c$ y $d+e$, y despues una cuarta á $d+e$, a y n.

326 Sea $x=\pm\frac{1}{2}a\pm\sqrt{(\frac{1}{4}a^2\pm b^2)}$ el valor sacado de la ecuacion general incompleta de 2.° grado $x^2\pm ax=\pm b^2$, y pues que abraza las dos fórmulas $x=\pm\frac{1}{2}a\pm\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b^2)}$, $x=\pm\frac{1}{2}a\pm\sqrt{(\frac{1}{4}a^2-b^2)}$, tomemos para construir la 1.ª $ac=\frac{1}{2}a$ (fig. 69), y ab perpendicular á ac igual á b, describase con ac un círculo, y tirando bt; tendremos $bt=tc+cb=\frac{1}{2}a+\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b^2)}$, y $br=bc-cr=-$

$\frac{1}{2}a+\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b^2)}$; luego $=\pm bt$ y $=\pm br$ serán los cuatro valores de la 1.ª espresion.

327 Para la construccion de la 2.ª $x=\pm\frac{1}{2}a\pm\sqrt{(\frac{1}{4}a^2-b^2)}$; sobre $ac=\frac{1}{2}a$ (fig. 65) trácese el semicírculo $abhc$, é inscribiendo en él $ab=b$, tirese bc que se alargará hasta que cn, cp sean iguales á ac, y serán $\pm bn \pm bp$ los cuatro valores que se buscan: pues $bn=cn-bc=\frac{1}{2}a-\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b^2)}$, y $bp=cp+cb=\frac{1}{2}a+\sqrt{(\frac{1}{4}a^2-b^2)}$.

328 Esto supuesto, para la solucion de los problemas geométricos, ademas de lo que dejamos dicho en la de los algébricos (240 y *sig. t.* I), se supone encontrado lo que se vá á buscar, valiéndose para formar la ecuacion que determine su valor, de la posicion y relaciones de las lineas que se den. Pero cuando las condiciones del problema no suministran todas las lineas necesarias para resolverle; es preciso buscarlas, alargando las dadas hasta que encuentren á otras, tirando paralelas, perpendiculares, tangentes, formando triángulos rectángulos ó semejantes, y valiéndose despues de las propiedades que de estas lineas y figuras dejamos demostradas en la geometría elemental: en especial la de los triángulos rectángulos y semejantes. Y supuesto que para esto no se pueden dar reglas generales, es preciso esperar los progresos y el acierto en esta materia del talento y del egercicio reflexionado que cada uno haga sobre ella. Al mismo tiem-

po que resolvamos algunos problemas, haremos las únicas advertencias que pueden guiarnos en tanta oscuridad é incertidumbre.

329 Prob. 1.° *Dados dos puntos* A, C, (fig. 139) *trazar un círculo que pase por ellos, y toque ademas la recta* BE. Supóngase encontrado el tercer punto T por donde ha de pasar el círculo, tírese por A y C la AE alargada hasta que corte á BE: y tendremos que averiguar el valor de ET. Divídase AC por medio en R, y llamando ER, a; AR$=$RC, b; y ET, x; será CE$=a-b$, y por lo demostrado (144) (ET)$^2=$AE×EC, ó $x^2=a^2-b^2$, y $x=\sqrt{(a^2-b^2)}=$ET: espresion que se puede construir describiendo sobre ER$=a$ el semicírculo RHE, é inscribiendo en él la RH$=$RC$=b$: pues será EH$=$ET$=x=\sqrt{(a^2-b^2)}$ en el triángulo rectángulo RHE (203).

330 2.° *Dividir la línea dada* AB (fig. 140) *en media y estrema razon en* D, o de modo que sea AB:AD::AD:DB. Sea AB$=a$, AD$=x$; será BD$=$AB$-$AD$=a-x$, y la proporcion AB: AD:: AD: DB se mudará en esta $a:x::x:a-x$, donde (197 *t.* I) $x^2=a^2-ax$, y (260 *t.* I) $x=-\frac{1}{2}a\pm\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+a^2)}$. Si se levanta en B la perpendicular BC$=\frac{1}{2}a$, y se tira la AC: valdrá $\sqrt{(a^2+\frac{1}{4}a^2)}$ ó $\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$: córtese de AC, CE$=$BC$=\frac{1}{2}a$, y será AE$=$AD$=$AC$-$CE$=\sqrt{\frac{5}{4}a^2}-\frac{1}{2}a$. El otro valor $-\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ se construye tomando a la par-

te opuesta $AH = AC + CB = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$, y la AH será tambien media proporcional entre HB y AB.

331 3.° *Dado el radio de un circulo, encontrar el lado del triángulo equilatero, el del decágono y pentágono regular.* 1.° Sea el radio $AC = a$ (fig. 141), x el lado AT del triángulo; será el arco ABT de 120°, AB de 60°, y el triángulo ABC isósceles: luego (82) $CP = \frac{1}{2}a$, y en el triángulo rectángulo APC será $(AP)^2 = (AC)^2 - (CP)^2$ ó $\frac{1}{4}x^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2$, $x^2 = 4a^2 - a^2$, y $x = \sqrt{(4a^2 - a^2)}$. Fórmese pues, sobre el diámetro MN un triángulo equilátero MRN, y la perpendicular RC será en el triángulo rectángulo MRC, $\sqrt{(4aa - aa)} = x$, por ser $MC = a$, y $MR = MN = 2a$.

332 2.° Suponiendo (fig. 142) $AD = x$ el lado del decágono, será su arco medida del ángulo ACD, $\frac{1}{10}$ de la circunferencia ó de 36°, CDA=CAD de 72° (86 y 87), y BDC de 108° (84). Hágase BD=DC, y será DBC=DCB=36°, y ACB=72°, luego los triángulos ABC, ADC serán semejantes, y se tendrá AB:AC::AC:AD, ó $a + x : a :: a : x$: será pues, $x^2 + ax = a^2$, y $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = AD$: espresion que encontramos (328) ser el segmento mayor de una linea $AC = a$ dividida en media y estrema razon.

333 3.° Para encontrar el lado $SD = z$ del pentágono regular, dado el del decágono $AD = b$ y el radio $AC = a$; tenemos DL=

$\frac{1}{2}z$ (82), $LC = \sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}z^2)}$ en el triángulo rectangulo DLC, y $AL = AC - LC = a - \sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}z^2)}$. Del triángulo rectángulo ADL se saca $(AD)^2 = (AL)^2 + (DL)^2$, ó poniendo sus valores, $b^2 = a^2 - 2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}z^2)} \ldots + a^2 - \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{4}z^2$, esto es, $2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}z^2)} = 2a^2 - b^2$. Cuádrense ambos miembros, reduzcase y partase por a^2, y resultará $z^2 = 4b^2 - \frac{b^4}{a^2}$: y pues que $b = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$ (330), si en lugar de b^2 y b^4 ponemos sus valores $\frac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$, $\frac{14}{4} - a^4 - 3a^3\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$; tendremos reduciendo, $z^2 = a^2 + \frac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$, ó $z^2 = a^2 + b^2$, poniendo b^2 en lugar de $\frac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$. Tomese ahora $CT = b$, y tirando RT, será en el triángulo rectángulo RTC, $RT = \sqrt{(a^2 + b^2)} = z$.

334 4.° *Dada la* HD (fig. 143) *y los angulos* H, D *que con ella forman* HC, DC, *averiguar el valor de la altura* CP *á que estas lineas se encuentran.* Llamemos m la tangente del ángulo D conocido, n la del angulo H, r el radio, HD, a; y la CP, y tendremos en el triángulo rectángulo CDP (281) DP *á* PC, *como el radio á la tangente del angulo* D; ó $DP : y :: r : m$; $HP : y :: r : n$; luego $DP = \frac{ry}{m}$, $HP = \frac{ry}{n}$; y $DP + HP = HD = a = \frac{ry}{m} + \frac{ry}{n}$: de consiguiente, $y = \frac{amn}{rm + rn}$. Si llamamos p, q las cotangentes de dichos angulos D, H, y

en lugar de sus tangentes m, n ponemos sus equivalentes (268) $\frac{r^2}{p}$, $\frac{r^2}{q}$ en la espresion hallada; quedará reducida á $y = \frac{ar}{p+q}$, mucho mas sencilla que la primera: para que se vea que de la eleccion de las lineas conocidas pende que el resultado sea ó no sencillo.

335 5.º *Dados los tres lados* $AC = a$, $BC = c$, $AB = b$ *de un triángulo* ABC (fig. 119 y 120), *hallar la perpendicular* AD *y los dos segmentos* BD, DC *que forma sobre* BC. Suponiendo $AD = z$ y $DC = x$, será $BD = BC - DC = c - x$ en la *fig.* 119 y en la 120 $BD = DC - BC = x - c$: y siendo $(DC)^2 + (AD)^2 = (AC)^2$, y $(BD)^2 + (AD)^2 = (AB)^2$; tendremos $x^2 + z^2 = a^2$, $c^2 - 2cx + x^2 + z^2 = b^2$: restando esta ecuacion de la 1.ª quedará $2cx - c^2 = a^2 - b^2$, y $x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c} = \frac{a^2 - b^2}{2c} + \frac{c}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{(a+b)(a-b)}{c}\right) + \frac{1}{2}c = DC$: que es la mitad de una cuarta proporcional á c, $a+b$ y $a-b$, sumada con $\frac{1}{2}c$: averiguada DC, se conocerá facilmente AD ó z.

336 De la ecuacion $2cx - c^2 = a^2 - b^2$ ó $c(2x - c) = (a+b)(a-b)$, se saca $c : a+b :: a-b : 2x - c$ ó $BC : AC + AB :: AC - AB : AD \pm BD$, proporcion demostrada (283). Asimismo, si en la ecuacion $z^2 + x^2 = a^2$, $z^2 = a^2 - x^2 = (a+x) \times$

$(a-x)$; ponemos por x su valor $\frac{aa-bb+cc}{2c}$ (333); tendremos $zz=(a+\frac{aa-bb+cc}{2c})\times(a+\frac{bb+aa-cc}{2c})=(\frac{2ac+aa+cc-bb}{2c})\times(\frac{2ac+aa-cc+bb}{2c})=(\frac{(a+c+b)(a+c-b)}{2c})\times(\frac{(b+c-a)(b-c+a)}{2c})$: luego $4cczz=((a+c+b)(a+c-b))((b+c-a)(b-c+a))$, ó $4c^2z^2=(a+c+b)(a+b+c-2b)(a+b+c-2a)(a+b+c-2c)$: y llamando $2s$ la suma de los tres lados $a+b+c$, $4c^2z^2=2s(2s-2b)(2s-2a)(2s-2c)=16s(s-a)(s-b)(s-c)$, donde partiendo por 16, reduciendo y sacando la raiz, resulta $\frac{1}{2}(cz)=\sqrt{(s(s-a)(s-b)(s-c))}$: y como $\frac{1}{2}(cz)=\frac{1}{2}BC\times AD$ es la superficie del triángulo ABC (182), se encontrará esta cuando se conocen sus lados, *restando sucesivamente cada lado de su semisuma, multiplicando las restas entre sí y por la semisuma, y sacando despues la raiz cuadrada del producto.* Véase pues, cuantas cosas puede contener una ecuacion ademas de la que se busca.

337 6.º *Desde un punto* B (fig. 144) *cuya situacion es conocida respecto del angulo* FCO, *tirar una recta que corte en él un triangulo* CHD *de una superficie igual á la de un cuadrado conocido mm.* Tírese como quiera la BHD, despues las HT y BN perpendiculares á OC, y BM paralela á FC, y tendremos en

los triángulos semejantes MDB,CDH,BDX, HDT: MD:CD:: BD:HD, BD:HD:: BX:HT: luego MD:CD:: BX:HT, ó llamando MC,a; BX,b; CD,x; $a+x:x::b:HT=\frac{bx}{a+x}$; y pues que $\frac{1}{2}CD \times HT$ es (182) la superficie del triángulo HCD, que ha de ser igual á mm; se tendrá..................
$\frac{x}{2} \times \frac{bx}{a+x} = mm$ ó $\frac{bx^2}{2(a+x)} = mm$, donde $x = \frac{mm}{b} \pm \sqrt{(\frac{m^4}{bb} + \frac{2amm}{b})} = \frac{mm}{b} \pm$........................ $\sqrt{(\frac{mm}{b}+2a)\frac{mm}{b}}$.

338 Para construir esta espresion, se levantará en cualquier punto D de una linea indefinida AX (fig. 145) la perpendicular DT$=b$, sobre AD y DT se tomarán DC, DN iguales cada una á m, y habiendo tirado TN, y por C la CH paralela á TN; será DH$=\frac{mm}{b}$ en los triángulos semejantes DTN, DCH, donde TD:CD::DN:DH, ó $b:m::m$: DH$=\frac{mm}{b}$; luego será $x=$DH$\pm\sqrt{(DH+2a)\times DH}$.

Tómese despues, BD$=2a$, trácese sobre HB un semicírculo que encuentre en P la DT, y será la cuerda PH$=\sqrt{(DH+2a)\ DH}$ (138): pásese esta á HO y HA: y serán los dos valores de x AD$=$ DH$+$HA$=$DH$+\sqrt{(DH+2a)DH}$, y DO$=$HO$-$DH$=\sqrt{(DH+2a)\times DH}-$DH. Si se pasa el primer valor AD des-

de C á D (fig. 144) y se tira la BHD, será el triángulo CDH el que se pide. En el 2.° valor DO, que se ha de tomar en sentido negativo para que sea $DH-\surd(DH+2a)DH$, se pasa de C á d y con el triángulo Chd se resuelve el problema respecto del ángulo hCd igual y opuesto á HCD, como se puede ver comparando los triángulos MBd, dhC; BdX, thd.

En el caso que el punto B se hubiese dado por bajo de la CD y en el mismo ángulo MCH (fig. 146); la posicion de las BX,BM contraria á la que tenian en el caso anterior, hace negativas las a, b, y produce el valor $x=-\frac{mm}{b}\pm\surd(\frac{mm}{b}-2a)\times-\frac{mm}{b}$: que siendo el mismo que el anterior aunque con signos contrarios, se construye del mismo modo que él.

En la fig. 147 en que el punto B por bajo de la CD coge la BX ó b en situacion opuesta al primer caso, el $-b$ reduce la espresion á esta $x=-\frac{mm}{b}\pm\surd(\frac{mm}{b}-2a)\frac{mm}{b}$. que siendo imaginária cuando $\frac{mm}{b}$ es menor que $2a$, muestra que entonces es imposible el problema. Cuando $2a$ se supone menor que $\frac{mm}{b}$, resultan negativos ambos valores y pertenecen al ángulo MCh igual y opuesto á FCO dado, respecto del cual será im-

posible el problema. Con efecto, si despues de haber hallado como digimos (336) $DH = \frac{mm}{b}$ (fig. 148), se toma $HB = 2a$, y al semicírculo trazado sobre ella se tira la tangente DP que será (144) $\sqrt{DH \times DB} = \sqrt{(\frac{mm}{b} - 2a)\frac{mm}{b}}$, y se lleva esta de D á A y á O: serán $AH = DH - AD = \frac{mm}{b} - \sqrt{(\frac{mm}{b} - 2a)\frac{mm}{b}}$, y $HO = HD + DO = \frac{mm}{b} + \sqrt{(\frac{mm}{b} - 2a)\frac{mm}{b}}$ los valores de x, que tomados con signos contrarios, es decir, llevados de C á D y d (fig. 147) y tirando las HBD, hBd, cortarán los triángulos HDC, hdC pedidos.

Dado el punto B dentro del ángulo HCD (fig. 149), la CM ó a que entonces resulta negativa, reduce los valores á la espresion $x = \frac{mm}{b} \pm \sqrt{(\frac{mm}{b} - 2a) \times \frac{mm}{b}}$ la misma que la anterior sino es en los signos: y así construida como ella, se llevarán AH, HO valores de $-x$, á D y d á la derecha de C, y darán los dos triángulos HCD, hCd que desatan la cuestion. La hemos tratado en toda su estension para que se acostumbren los principiantes á sacar de una ecuacion los diferentes casos que puede encerrar.

339 Por este problema podremos facil-

mente 1.° *dividir un triángulo* AHQ (fig. 143) *desde un punto* B *dado dentro ó fuera de él, en dos partes que tengan entre sí una razon cualquiera a:b.* Pues si se hace $a+b$ á a, *como la superficie conocida del triángulo* AHQ *al 4.° término*; será este la superficie que debe tener el triángulo HCD que se pide: con que si buscando un cuadrado *mm* igual á esta superficie, tiramos desde el punto B una recta, que corte en el ángulo AHQ una superficie igual á *mm* (335), se habrá resuelto el problema.

340 2.° *Dividir desde un punto dado* K (fig. 150) *cualquier figura rectilínea* ABCDE *en dos partes* ARLB,REDCL *que tengan entre sí una razon dada.* Conocida la ABCDE con todos sus ángulos y lados, averiguaremos la superficie del ángulo AFB, cuyo lado AB, y ángulos BAF, ABF, suplementos de FAB, ABC, son conocidos: y siendo facil averiguar como en el problema anterior, la superficie ARLB, porcion determinada de toda la figura: se reducirá el problema á tirar desde el punto K una recta KRL que corte en el ángulo EFC un triángulo de una superficie conocida. Lo que tambien podrá servirnos para dividir una figura en cualesquiera partes.

341 7.° *En una esfera* AHBD (fig. 151) *formada por el semicírculo* ABD *al rededor del diámetro* AB, *se pregunta en que punto será la solidez del segmento esférico* DAHFD

igual á la del cono DCH. Sea $AC = a$, $AE = x$, será $CE = a - x$: y suponiendo $r{:}c$ la razon del radio á la circunferencia, será la del círculo máximo ADBHA el 4.° término de la proporcion $r{:}c{::}a{:}\frac{ac}{r}$: la superficie del casco esférico DAH (224) $\frac{ac}{r} \times x$, y la solidez del sector esférico DCHA (242) $\frac{ac}{r} \times x \times \frac{1}{3}a = \frac{a^2cx}{3r}$. La del cono DCH es el producto de su base cuyo rayo es ED, multiplicada por el tercio de la altura EC (239): y como en el triángulo rectángulo EDC, $ED = \sqrt{((DC)^2 - (EC)^2)}$, ó $ED = \sqrt{(a^2 - a^2 + 2ax - x^2)} = \sqrt{(2ax - x^2)}$; si se hace $r{:}c{::}\sqrt{(2ax - x^2)}{:}\frac{c\sqrt{(2ax - x^2)}}{r}$; será esta la espresion de la circunferencia del círculo base del cono: su superficie (185) el producto de esta circunferencia por $\frac{1}{2}ED$, mitad de su radio, ó $\frac{1}{2}\sqrt{(2ax - x^2)} \times \left(\frac{c\sqrt{(2ax - x^2)}}{r}\right) = \frac{c(2ax - x^2)}{2r}$: y la solidez del cono el producto de esta base por $\frac{1}{3}EC$, tercio de la altura, esto es, $\frac{c(2ax - x^2)}{2r} \times \frac{a - x}{3}$.

Si esta, que en el caso presente debe ser la mitad de la del sector DCHA, se multiplica por 2, quedará igual á la de dicho

rector: de suerte que tendremos $\frac{2c(2ax-x^2)}{2r}\times\frac{a-x}{3}=\frac{a^2cx}{3r}$, que se reduce á $x^2-3ax=-a^2$, donde $x=\frac{3}{2}a\pm\sqrt{\frac{5}{4}a^2}=\frac{3}{2}a\pm\sqrt{(\frac{9}{4}a^2-a^2)}$: espresion que se construye tomando $AR=\frac{3}{2}a$, trazando sobre ella el semicírculo, é inscribiendo en él la $AT=a$: pues siendo la TR en el triángulo rectángulo ATR, $\sqrt{((AR)^2-(AT)^2)}=\sqrt{(\frac{9}{4}a^2-a^2)}$: si se toma RE=TR, será AE=AR−ER.......... $=\frac{3}{2}a-\sqrt{(\frac{9}{4}a^2-a^2)}=x$.

342 El otro valor $x=\frac{3}{2}a+\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ que por ser mayor que el diámetro $2a$, no puede pertenecer á la cuestion, resuelve esta otra; *dada la* AQ *dividida en tres partes iguales en* B *y* C, *encontrar en la misma direccion un punto* E, *tal que* AC *sea media proporcional entre las distancias de* E *á los estremos* A *y* Q: pues suponiendo AC, a; AE, x; se tendrá $x:a::a:3a-x$; $3ax-x^2=a^2$, y $x=\frac{3}{2}a\pm\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$: y supuesta la construccion anterior se pasará TR á E y E′, puntos que satisfarán la pregunta. Estos problemas cuya ecuacion incluye la solucion de cuestiones distintas, se llaman *concretos*; y *abstractos* aquellos que tienen tantas soluciones como valores la incognita.

343 Concluyamos esta materia previniendo á los que se egerciten en ella, que no esperen acertar desde luego con el camino mas corto de resolver y construir un problema.

Entre los diferentes datos de que se puede echar mano para este efecto, los hay que conducen á ecuaciones mas ó menos complicadas, de inferior ó de superior grado; y por eso se deben tentar otros medios siempre que el escogido aparezca embarazoso: en la inteligencia de que la mayor parte de las espeditas y elegantes construcciones y soluciones que leemos en las obras de los mayores geómetras, no se han conseguido antes de haber probado otras mas complicadas y trabajosas; y de consiguiente que ademas de talento, se necesita haber adquirido con el egercicio cierto tino, para creerse adelantado en esta materia tan util como dificil y delicada: especialmente cuando se trata de construir ecuaciones de grados superiores.

ARTICULO II

Construccion de las ecuaciones indeterminadas de 1.° y 2.° grado ó de los lugares geométricos

344 Todos los puntos de una linea cualquiera que no se haya tirado casualmente, han de estar situados segun cierta ley ó propiedad particular que caracterice la linea; y que reducida á ecuacion, espresará su naturaleza. Para encontrar esta ecuacion por la que se puedan despues determinar todos los puntos

de la linea; basta referir cualquiera de ellos á dos rectas fijas colocadas en el mismo plano que ella, y exâminar despues la razon que tienen entre sí las distancias de la linea á las otras dos.

345 Para determinar por eg., la situacion de los puntos de la linea HR (fig. 152); tomaré dos rectas EL, BD que formen un ángulo cualquiera BCL, y tirando desde uno de sus puntos M la MP paralela á BD: espresarán las MP, CP las distancias de HR a BD y EL: como tambien las HS, CS; *mq*, *Cq* &c. espresarán las de los puntos H, *m*. Los dos puntos A y F en que BD y EL cortan la HR, determinan esta linea, y lo mismo las CA y CF, en cuya razon deberan estar todas las demas distancias CP, PM; CE, EH; *Cq* *qm* &c. á causa de la semejanza de los triangulos CAF, AMP, *Aqm* &c.

346 Pero antes de pasar adelante se ha de advertir que las partes CA, CP, *Cq* se llaman *abscisas*, y EL *exe de las abscisas*: las PM, *qm*, EH *ordenadas ó aplicadas*, y la BD *exe de las ordenadas*, cada abscisa con su ordena lo *coordenadas*. Unas y otras son *negativas* cuando caen á la izquierda de BD, si suponemos *positivas* las de la derecha, y al contrario. Toda linea como las abscisas y ordenadas, que varía de tamaño en cada diferente punto, se llama *variable*; y *constante* la que tiene valor fijo como las CA, CF, el

radio de un círculo &c. En lo sucesivo representarémos las ordenadas con las letras y, u..: y las abscisas con x, z...

347 Esto supuesto, para determinar la situacion de los puntos de la HR; colocando el principio ú *origen* de las abscisas en A, y haciendo CA$=a$, CF$=b$, AP$=x$, PM$=y$; tendrémos en los triángulos semejantes CAF, APM, CA:CF::AP:PM ó $a:b::x:y$; PM$=\frac{bx}{a}$, que nos dará el punto M luego que se conozca CP ó x: lo mismo se hubiera sacado de los triángulos Aqm, AHS para determinar las mq, HS.

Pudieramos haber puesto el origen de las abscisas en cualquier otro punto C: en este caso CP$=x$, AP$=x-a$, y y la proporcion CA: CF::AP:PM se muda en $a:b::x-a$: PM $=y=\frac{bx-ab}{a}$. En el puntó m se tiene C$p=x$, A$p=$ CA$-$C$p=a-x$; y en los triángulos semejantes Apm', ACF, es AC:CF::Ap:pm', ó $a:b::a-x$: $y=\frac{ab-bx}{a}$, espresion idéntica con la anterior, sino es en los signos; por ser negativa la pm' que cae bajo de la EL: luego dicha ecuacion será la propia de la linea HR, pues que representa todos sus puntos.

348 En el punto en que comienzan las abscisas, es decir en su origen, es $x=o$, ó no hay abscisa: como tambien $y=o$ en el punto A en que no hay ordenada, por pasar por el

la HR. Luego si suponiendo $y=o$ en una ecuacion, resultase $x=o$ ó al contrario; pasará la linea á que pertenece, por el origen: pero si suponiendo $x=o$ resultase algun valor de y, determinará este en el ege de las ordenadas el punto por donde pasa la linea: y si haciendo $y=o$ tuviese x algun valor, se conocerá por él el punto en que la linea corta el ege de las abscisas. En la ecuacion $y=\frac{bx}{a}$ resulta $y=o$, $x=o$ en la suposicion de ser cero cualquiera de ellos; prueba de que HR pasa por el origen A: pero si en $y=\frac{bx-ab}{a}$ se hace $y=o$; se tendrá $x=a=$CA, á cuya distancia del origen C pasa HR; y haciendo $x=o$, resulta $y=-b=$CF, distancia á que pasa de C la HR.

349 Las ecuaciones de esta forma $y=\frac{cx}{b}+p$ pertenecen á lineas rectas que se llaman de 1.^r^ *grado* por resolver con su interseccion los problemas de 1^r^ grado: lineas de 2.° grado o curvas de 1.° son el círculo y las secciones conicas, *Parabola*, *Elipse* é *Hipérbola* cuyas ecuaciones son de 2.° grado, y resuelven los problemas de este genero, por medio de una recta que corte cualquiera de dichas curvas. Las ecuaciones de 3.° 4.° y demas grados altos resuelven problemas superiores por medio de curvas de orden superior al

2.º: de las que se llaman *algebricas* ó *geométricas* aquellas cuyas abscisas y ordenadas son líneas cuyo valor puede sacarse geométricamente, y *trascendentes* ó *mecánicas* aquellas cuyas abscisas y ordenadas son arcos de círculo, logarítmos, senos, tangentes &c. Las que en su descripcion guardan cierta ley, se llaman *lugares geometricos*, por cuanto todos sus puntos suministran soluciones á los problemas geométricos indeterminados. La semiperiféria del círculo por eg. es el lugar geométrico de los vértices de todos los triangulos rectángulos que pueden tener su diámetro por hipotenusa (69). Nosotros nos tenemos que ceñir en esta vasta é intrincada materia á lo dicho sobre las ecuaciones indeterminadas de 1.^r grado, y en cuanto á las de 2.º 3.º &c. tratarémos analíticamente de las principales propiedades del circulo, de las tres secciones cónicas, y de algunas curvas particulares.

350 Supongamos pues, que todos los puntos de la circunferencia AMNB*mn* (fig. 153) se refieran á las dos líneas DR ege de las ordenadas, y AB ege de las abscisas, y que poniendo su origen en A, se trate de espresar en una ecuacion la relacion de las coordenadas AP, PM; A*p*, *p*N &c. tomando de A á B las abscisas positivas y de A á E las negativas, de A á D las ordenadas positivas de A á R las negativas. Hagamos $PM=y$, el radio $AC=a$, $AP=x$; será $PB=AB-AP=2a-x$: y

pues que dejamos demostrado (130) de cualquier punto M del círculo que AP:PM::PM: PB; tendremos poniendo sus valores, $x:y::y:2a-x$, y de consiguiente $y^2=2ax-x^2$, ó $y=\pm\sqrt{(2ax-x^2)}$, ecuacion que se busca, y que manifiesta que á cada abscisa AP$=x$ corresponden dos valores de y; PM y Pm: de suerte que la curva tendrá dos ramos AMNB, AmnB.

351 Si dada la ecuacion se nos pidiese describir por ella el círculo; supondríamos desde luego $x=o$, y por el resultado $y=o$ conoceremos que la circunferencia pasa por el origen A: haciendo despues $y=o$, resulta $x^2=2ax$ ó $x^2-2ax=o$, ecuacion en la que $x=o$, $x=2a=$AB, y que da los puntos A y B por donde pasa la curva. Para determinar los demas, se darán diferentes valores á x, y de cada uno resultarán dos de y, uno positivo y otro negativo. Si fuese por eg. AP$=x=2$ en la suposicion de valer a, 5; $y=\pm\sqrt{16}=\pm4$ determinaria la longitud de PM y Pm, y de consiguiente los puntos M, m de la circunferencia, que no puede pasar de B; pues si se supone x mayor que $2a$, saldrá la cuantidad $2ax-x^2=(2a-x)x$ negativa, y la y imaginária ó imposible (260 *t.* I).

352 Las principales propiedades del círculo se sacan facilmente de su ecuacion $y^2=2ax-x^2$. Comencemos por los triángulos rectángulos MPC, AQC: en el primero se tie-

ne $(MC)^2=(MP)^2+(CP)^2$ ó $(CM)^2=$...... $2ax-x^2+a^2-2ax+x^2$, poniendo por $(MP)^2$, $2ax-x^2$; y por $(CP)^2$, $(a-x)^2$, redúzcase, y se tendrá $CM=a$, ó *que todos los radios son iguales*. En el otro triángulo AQC, donde $(AQ)^2=(QC)^2+(AC)^2=y^2+x^2$, se tiene poniendo $2ax-x^2$ en lugar de y^2, $(AQ)^2=2ax$: luego x:AQ::AQ:$2a$, propiedad demostrada (138).

353 Cada una de las cuerdas ZB, QB vale $\sqrt{2a^2}$ en los triángulos rectángulos QCB, ZCB: de consiguiente 1.° $(QB)^2+(ZB)^2=4a^2=(QZ)^2$: es decir, que será recto el ángulo QBZ (69). 2.° En el cuadrilátero AQBZ el producto de las dos diagonales $QZ\times AB=4a^2$, es igual á $AQ\times BZ+AZ\times BQ=4a^2$.

354 Si el origen de las abscisas se hubiera colocado en el centro C, háciendo CP, x; se hubiera sacado del triángulo rectángulo CPM, $(PM)^2=(CM)^2-(PC)^2$, ó $y^2=a^2-x^2$, otra ecuacion al círculo que incluye la proporcion $a-x$:y::y:$a+x$, ó AP:PM::PM:PB de donde se sacó la primera (348).

355 Tambien pudiera haberse puesto el origen de las abscisas en cualquier otro punto T: en cuyo caso tirados los eges TX de las abscisas y GS de las ordenadas, bajadas perpendicularmente desde el centro á una y otra las $CE=c$, y $CK=b$, serán $MU=GT=y$, y $MG=UT=x$ las coordenadas de un punto cualquiera M de la circunferencia; las coor-

denadas del punto N son NO=YT=x, y NY=TO=y &c. La ecuacion que representa la relacion de estas lineas, se saca facilmente del triángulo rectángulo MPC, donde $(CM)^2=(PM)^2+(PC)^2$; pues siendo MC=a, MP=MU+UP=$y+b$; y PC=EC−EP=$c-x$; se tiene $a^2=y^2+2by+b^2+c^2-2cx+x^2$, y de consiguiente $y=-b\pm\sqrt{(a^2-x^2+2cx-c^2)}$: nueva ecuacion al círculo del mismo grado que las anteriores.

356 Háyase de construir por último la curva cuya ecuacion es $y^2=x^2-a^2$: suponiendo $y=0$, resulta $x=\pm a$: de consiguiente, tomando en el punto A de una recta indeterminada BD (fig. 154) el principio de las abscisas, y las partes AS, As iguales á a, deberá pasar la curva por S, s. La ecuacion $y=\pm\sqrt{(x^2-a^2)}=\pm\sqrt{((x+a)(x-a))}$ manifiesta que tomando las abscisas positivas ácia D, corresponden á cada AP=x, dos valores iguales PM, Pm, uno positivo y otro negativo: es decir, que la curva tendrá dos ramos SM; Sm iguales é infinitos. Otros dos iguales y opuestos á los primeros se sacan de la ecuacion $y=\pm\sqrt{((-x+a)(-x-a))}$ que resulta de tomar las abscisas ácia B o negativamente: pero en uno y en otro caso ha de ser x mayor que a para que el radical no sea imaginario, é imposible su valor; pues que entre S y s no hay curva.

ARTICULO III

De las Secciones cónicas, Parábola, Elipse é Hyperbola

357 Si una recta indeterminada AR (fig. 155) fija en el punto G, recorre las dos circunferencias $DmAm'RNQn$; habrá formado dos superficies cónicas opuestas AGD, GRQ, que pueden ser menores ó mayores indefinidamente: y de cuyas diferentes secciones por un plano resultan las que se llaman *secciones cónicas*. La seccion de un plano que por el punto G cortase perpendicularmente cualquiera de dichos conos, sería un triángulo GDA. Será un círculo $EMFM'$, siempre que el plano corte el cono GDA paralelamente á la base, ó formando el mismo ángulo con los lados GD, GA. Si el plano pasa por Bb (fig. 156) cortando los lados GA, GR con diferentes ángulos; resulta una seccion $BMMb$, que se llama *elipse*. Será una *parábola* $BMmm'$ (fig. 157) cuando el plano secante es paralelo á uno de los lados GC del cono: y ultimamente, si dejando de ser paralelo, cortase uno y otro cono (fig. 155): trazará las curvas $BMmm'$, bNn que se llaman ***hipérbolas.***

358 En la parábola Bmm' (fig. 157) en la que la Bp se llama *ege*, el punto B *vertice*

y origen de las abscisas, las PM, *pm ordenadas*, y las BP, *Bp abscisas*, *los cuadrados de las ordenadas están en la misma razon que sus abscisas*, ó $(PM)^2 : (pm)^2 :: BP : Bp$. Porque si corta al cono el plano circular FME paralelamente á la base, y á estos dos planos paralelos los corta el triangular GBC; serán paralelas las comunes secciones FE, DC (179), y por lo mismo serán tambien paralelas las MP, *mp* secciones comunes de aquellos planos paralelos, cortados por B*mm'*: luego siendo por la naturaleza del círculo (1[illegible]) $(MP)^2 = EP \times PF$, $(mp)^2 = Dp \times Cp = Dp \times PE$ por ser PE=C*p* (93): tendremos $(MP)^2 : (mp)^2 :: FP \times PE : Dp \times PE :: FP : Dp$, y pues que FP:D*p*::BP:B*p* en los triángulos semejantes BPF, B*p*D; será finalmente $(MP)^2 : (mp)^2 :: BP : Bp$.

359 En la elipse (fig. 156) supuesto que los planos AGR, B*db* cortan los paralelos EMF, C*m*D: se tiene en los triángulos semejantes BPF, B*p*D; *b*EP, *b*C*p*: BP:B*p*::PF:*p*D; *b*P:*bp*::EP:C*p*: luego será multiplicando estas proporciones, $BP \times bP : Bp \times bp :: PF \times EP : pD \times Cp$: y pues que en los círculos EMF, C*m*D, $(PM)^2 = PF \times EP$, $(pm)^2 = Dp \times Cp$; se tendrá $BP \times bP : Bp \times bp :: (PM)^2 : (pm)^2$: es decir, *los cuadrados de las ordenadas* PM, *pm*, *son en la elipse como el producto de las partes* BP, *b*P; B*p*, *bp que cortan en el eje* B*b*, *que llamaremos* abscisas.

360 Lo mismo se saca en la hipérbola (fig. 155) de los triángulos BEP, BDp; bPF, bpA, donde BP:Bp::EP:Dp, bP:bp::PF:pA: y de consiguiente, BP×bP:Bp×bp:: EP×PF:Dp×pA, ó BP×bP:Bp×bp::(PM)^2: (pm)^2, poniendo por EP×PF, Dp×pA sus iguales (PM)^2, (pm)^2: solo hay la diferencia de que en la hipérbola las abscisas BP, bP; Bp, bp se toman para cada ordenada de distinto lado que en la elipse.

Para que conozcamos mejor las utilísimas propiedades de estas tres curvas de que se hace un uso continuo y general en todos los ramos de física y matemáticas, hablaremos de cada una en particular, considerándolas descritas en un plano.

De la parábola

361 Es la parábola una curva cuyos puntos M, N, n, m (fig. 158) distan todos igualmente de una linea fija BD que se llama *directriz*, y de un punto F que se llama *focus*, distante siempre del vértice S de la cuarta parte de una linea p conocida con el nombre de *parámetro*: de manera que si en el punto O de una escuadra OGB, y en cualquier otro F se fijan los estremos de un hilo OMF igual en longitud á OG, y se mueve la escuadra ácia E llevando tirante el hilo con un lapiz M; la linea MNS que describa el lapiz, y la otra mi-

tad Snm que trace del mismo modo del otro lado de la EH, será una parábola: pues en cualquiera de sus puntos M se verifica que siendo $OG=OMF$, es $MF=MG$, quitando MO comun: y por lo mismo $SF=SE=\frac{1}{4}p$.

362 La recta MF tirada desde cualquier punto M de la parábola al focus, se llama *radio vector*; y si se tira desde M la ordenada $MP=y$, siendo $SP=x$, será siempre $MF=MG=EP=PS+SE=x+\frac{1}{4}p$. Luego si habiendo escogido en la linea SH que haya de ser ege de la parábola, el punto S para vértice, y tomado $SF=SE=\frac{1}{4}p$ para señalar el focus F; si despues de haber tirado perpendiculares indefinidas á todos los puntos P del ege, se trazan desde F con el intervalo de cada PE dos arcos á un lado y otro de la SH; se determinarán de cada vez dos puntos M, m de la curva, que se describirá fácilmente, determinando así los demas: pues en tal caso cada FM será igual á la distancia EP ó GM.

363 En el triángulo rectángulo FMP, en el que $(PM)^2=(FM)^2-(FP)^2$, será poniendo en lugar de PM, FM, FP, sus valores y, $x+\frac{1}{4}p$, $x-\frac{1}{4}p$; $yy=xx+\frac{2}{4}px+\frac{1}{16}pp-xx+\frac{2}{4}px-\frac{1}{16}pp$, que se reduce á $yy=px$, ó $y=\pm\sqrt{px}$, ecuacion de la parábola: que comparada con $YY=pX$ de otra cualquier ordenada Y, cuya abscisa sea X, dá $yy:YY::px:pX::x:X$, segun lo demostramos ya (356).

364 Si hacemos en ella $x=o$ ó $y=o$, ve-

remos que pasa la curva por el origen S, sin que se estienda mas alla; pues resulta imaginaria la $y = \pm\sqrt{-px}$ tomando á x negativa. Y como á cada x corresponden dos valores iguales de y, que crecen á proporcion que es mayor x; tendrá la parábola dos ramos iguales é infinitos; cuyos puntos podran determinarse dando á x diferentes valores, y sacando en cada uno los que corresponden á y.

365 De $yy = px$ se saca $x:y::y:p$, esto es, *que cada ordenada es media proporcional entre su abscisa y el parámetro, y éste tercera proporcional á cualquier abscisa y su ordenada*: de suerte que la doble ordenada Nn (fig. 158) que pasa por el focus, es igual al parámetro: pues siendo la abscisa SF $= \frac{1}{4}p$, será $(NF)^2 = yy = px = \frac{1}{4}pp$, y NF $= \sqrt{\frac{1}{4}pp} = \frac{1}{2}p$; luego N$n = p$. Si á una cuerda cualquiera SL (fig. 159) se levanta la perpendicular LQ, sera tambien RQ el parámetro de la parábola: pues en el triángulo rectángulo SLQ, SR:RL::RL:RQ, ó $x:y::y:$RQ$=p$.

366 *Para tirar una tangente á un punto* M *de la parabola* (fig. 158); tiradas las MG, MF y GF; la MT perpendicular a GF será la tangente: pues de cualquier otro punto suyo Z que no sea M, se probará que está fuera de la curva. Para esto tirense ZF al focus, ZB perpendicular á la directriz y ZG [illegible]: se verá que siendo ZB menor que ZG ([illegible]) ó que su igual ZF, Z no está en la parábola

(359). Si á la tangente MT se levanta en el punto M la perpendicular ó *normal* MR, la parte TP de ege comprendida entre la tangente y la ordenada MP, se llama *subtangente*, y la PR comprendida entre la ordenada MP y la normal se llama *subnormal*.

367 Siendo iguales los ángulos GMT, TMF (82), y GMT=ZMO; será ZMO=TMF: ZMO se llama ángulo *de la incidencia*, y TMF *de la reflexion*. Tambien por razon de las paralelas GM, TF, y por ser GC=CF; serán iguales y semejantes los triángulos GCM, TCF (90 y 131), y de consiguiente MG=TF=FM: y en el triángulo isósceles MFT, la FC perpendicular á la tangente la dividirá por medio.

368 Pues que FM=FT=$x+\frac{1}{4}p$, será TP=TF+FP=$x+\frac{1}{4}p+x-\frac{1}{4}p=2x$, ó *la subtangente* PT *dupla de su abscisa* SP: y de consiguiente SP=ST. Luego 1.º el paralelogramo MKSP (fig. 159) es igual al triángulo MPT, que tiene doble altura que él (97). 2.º Para tirar una tangente al punto M de la parabola (fig. 158) se bajará la perpendicular MP, y haciendo ST=SP, se tirará por T y M la TM.

369 *Las perpendiculares* FC *bajadas desde el focus á la tangente, son como las raices cuadradas de los radios rectores*: pues dividiendo FC por medio la MT, lo mismo que la tangente SC, por ser TC:CM::TS:SP, y TS=SP: coincidirá la CS con FC en G; y en el triángulo rectángulo CTF será TF: FC:: FC:

FS, $(FC)^2 = TF\times FS = FM\times \frac{1}{4}p$: en otro punto M' se tendria tambien $(FC')^2 = FM'\times \frac{1}{4}p$: luego $(FC)^2 : (FC')^2 :: FM\times \frac{1}{4}p : FM'\times \frac{1}{4}p$, y $FC:FC' :: \sqrt{FM}:\sqrt{FM'}$.

370 4.° En el triángulo rectángulo RMT se tiene (136) $PT:PM::PM:PR = \frac{(PM)^2}{PT} = \frac{px}{2x} = \frac{1}{2}p$ es decir, *que la subnormal es la mitad del parámetro.* La normal $MR = ... \sqrt{((MP)^2 + (PR)^2)} = \sqrt{(px + \frac{1}{4}pp)} = \sqrt{MF\times p}$ en el triángulo rectángulo MPR: y del TMP tambien rectángulo, se saca la tangente $TM = \sqrt{((PM)^2 + (PT)^2)} = \sqrt{(px + 4x^2)} = \sqrt{4MF\times x}$.

371 Cualquiera recta MO paralela al ege SH se llama *diámetro* cuyas ordenadas son $m'p'$ paralelas á TM, tangente en el punto M del diámetro: su parámetro (q) es tambien cuádruplo de la distancia FM de su vértice al focus; de manera que $q = 4MF = p + 4x$, y de consiguiente tercera proporcional á la abscisa y tangente que corresponden al punto M; pues es $\div x : tang = \sqrt{(px + 4x^2)} : p + 4x = q$, ó $\div x : MT : q$.

372 Sea la abscisa Mu, z (fig. 159), y u la ordenada ln al diámetro MO; tendrémos en los triángulos lpn, MPT, $MT:lp::MP:ln::TP:pn$, ó $\sqrt{qx} : u + \sqrt{qx} :: \sqrt{px} : ln = \frac{u\times\sqrt{px}}{\sqrt{qx}} + \sqrt{px}$: $2x : pn = \frac{2ux}{\sqrt{qx}} + 2x$: y como $Sp = Tp - TS$

$=Mu-TS=z-x$; será $Sn=Sp+pn=z+x+\frac{2ux}{\sqrt{qx}}$. Por la propiedad de la parábola (361), $(ln)^2=p\times Sn$, ó $(\sqrt{px}+\frac{u\sqrt{px}}{\sqrt{qx}})^2=pz+px+\frac{2xpu}{\sqrt{qx}}$; en donde sacando el cuadrado y reduciendo, resulta $u^2=qx$, ecuacion á la parábola respecto de sus diámetros, en todo semejante á la del ege, y de la que se sacará como en ella, *que los cuadrados de las ordenadas son como las abscisas*; *que á cada abscisa corresponden dos ordenadas iguales* &c.

373 Si se pidiese trazar una parábola, cuyas ordenadas formen un ángulo conocido con un diámetro dado MO (fig. 158), cuyo parámetro se dé tambien; se tirará por el vértice M del diámetro la recta ZMT que forme con él un ángulo OMZ igual al dado: se hará despues el ángulo TMF=ZMO, y tomando $MF=\frac{1}{4}q$; se tendrá el focus F por donde se tirará la HT paralela á MO que será el ege: bájesele la perpendicular MP, y dividiendo PT por medio, se tendrá el vértice S con el que y el focus se trazará la parábola (360).

374 Si se tiran (fig. 159) la ordenada mp infinitamente próxima á PM, y las MK, rt paralelas á TP; se tendrá en los triángulos TMP, roM, TP:PM::ro=Pp:rM, ó poniendo por TP su igual $2sp$, ó 2KM; 2KM:PM::Pp:rM: y de consiguiente PM×Pp=2KM×rM, ó

el paralelogramo Pp mM duplo del rMKt: y como se puede probar otro tanto de cualquiera de los paralelogramos de que se compone la superficie de la parábola; será cualquier espacio parabólico SPM duplo del espacio esterior SoMK, ó los dos tercios del rectángulo SPMK: los triángulos omM, roM se desprecian en el cálculo por infinitamente pequeños (442). Solo en el caso que las abscisas tengan como en la parábola, una relacion constante con la subtangente, podrán cuadrarse exáctamente las curvas.

De la elipse

375 La propiedad que caracteriza esta curva es que la suma de las distancias FM+fM (fig. 160) de cualquiera de sus puntos M á los dos F, f que se llaman sus *focus*, es igual á la línea Ss su *ege mayor*: de manera que si clavados en F, f los estremos de un hilo FMf, mas largo que Ff, se le lleva estirado con un lapiz al rededor de dichos puntos; resultará descrita una elipse. En ella llamarémos *ege menor* la Bb perpendicular al punto C mitad de Ss y *centro* de la elipse: a las CF, Cf *escentricidad*: las MP, mP *ordenadas* y SP, sP *abscisas* del ege mayor Ss; Mp, Bp, bp *ordenadas* y *abscisas* del ege menor Bb, y las FM, fM *radios vectores*. Últimamente, la TX es *tangente* (fig. 161), la MR *normal*, PR

subnormal, y PT *subtangente*, correspondientes al punto M de la elipse.

376 La estension del hilo en el punto S (fig. 16c) es $2SF+Ff$, y en s, $2sf+fF$: luego $2SF+Ff=2sf+fF$; y de consiguiente $SF=sf$, $CF=Cf$. De lo que se infiere 1.° que el punto b de la perpendicular Cb debe estar á igual distancia de F y f (29) como lo está C, ó $Fb=fb=SC$ mitad de Ss; y el *ege menor se dividirá por medio* en C, á causa de los triángulos rectángulos iguales fCB, fCb. 2.° Un arco descrito desde b con el radio CS, cortará la Ss en los puntos F, f que serán los focus: de suerte que será facil trazar la elipse dados los dos eges; pues determinados sus focus, se practicará despues lo que digimos (373).

377 Llamemos ya Ss, $2a$; Bb, $2b$; $CF=Cf$, c; PM, y; CP, x: será $PS=SC-CP$, $a-x$; $Ps=sC+CP$, $a+x$; $PF=CF-CP$, $c-x$; $Pf=fC+CP$, $c+x$; $SF=SC-CF$, $a-c$; y $Fs=a+c$: y en el triángulo rectángulo FbC tendremos $(Fb)^2=(FC)^2+(Cb)^2$ ó $aa=cc+bb$; de donde se saca $cc=aa-bb$, y $bb=aa-cc$: luego $a+c:b::b:a-c$, ó ∺ $Fs:Cb:FS$; esto es, *el semiege menor Cb medio proporcional entre las distancias Fs, FS de los vertices á uno de los focus.*

378 Esto supuesto, en el triángulo FMf es (283) $FM+Mf$ $(2a)$: Ff $(2c)$ :: $fP-PF$ $(2x)$: $fM-FM=\frac{4cx}{2a}=\frac{2cx}{a}$. Con esta diferencia, y

la suma $2a$ de FM y fM, sacaremos (101 *t.* I) $FM=a-\frac{cx}{a}$: y en el triángulo rectángulo PMF será $(PM)^2=(FM)^2-(PF)^2$, ó $yy=aa-2cx+\frac{ccxx}{aa}-cc+2cx-xx$, que se reduce poniendo $aa-bb$ en lugar de cc (375), á $yy=bb-\frac{bbxx}{aa}=\frac{bb}{aa}(aa-xx)$: ecuacion á la elipse, en la que por ser $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{(aa-xx)}$, corresponderán á cada abscisa CP dos ordenadas iguales una positiva y otra negativa, que se determinarán conociendo á x, y podrá trazarse por este medio la elipse: á la que siempre divide por medio el ege mayor.

379 Si el origen de las abscisas se coloca en S haciendo $SP=x$, $SF=sf=c$; SP×Ps que antes era $(a-x)(a+x)$, será $x(2a-x)$: póngase este producto en la ecuacion anterior en lugar de $aa-xx$, y quedará reducida á $yy=\frac{bb}{aa}\times(2ax-x^2)$, ecuacion en la que suponiendo $y=o$, resulta $xx-2ax=o$, donde $x=o$ y $x=2a$; es decir, que la curva pasa por S en que $x=o$, y por s en que $x=Ss=2a$.

380 Tambien se verificará de otra cualquier ordenada MP′ (Y), cuya abscisa SP′ sea X, $YY=\frac{bb}{aa}\times(aa-XX)$: de consiguien-

te será yy:YY::$\frac{bb}{aa}$ $(aa-xx)$: $\frac{bb}{aa}\times(aa-$XX)::$aa-xx$: $aa-$XX; ó $(PM)^2$:$(M'P)^2$:: SP×Ps:SP'×P's como lo digimos (357). Tambien de $yy=\frac{bb}{aa}\times(aa-xx)$ se saca $yy:aa-xx::bb:aa$; y si en lugar de bb ponemos su igual $aa-cc$, resultará $yy:aa-xx::aa-cc:aa$ ó $(PM)^2$:SP×Ps::SF×Fs:$(SC)^2$.

381 Siendo $Mp=PC=x$, $Cp=PM=y$, y de consiguiente $bp=y+b$, y $Bp=b-y$: será la ecuacion al ege menor de la elipse despejando xx en $y^2=bb-\frac{bbx}{aa}$ (376), $xx=aa-\frac{aayy}{bb}=\frac{aa}{bb}\times(bb-yy)$, la misma respectivamente que la del ege maӯor, y de la que se deducen las mismas consecuencias que de aquella.

382 Trazado un círculo sobre el ege mayor Ss (fig. 161), si en la proporcion $(PM)^2$: SP×Ps:: $(BC)^2$: $(SC)^2$ (378), ponemos en lugar de SP×Ps su igual $(PH)^2$ (136): tendremos $(PM)^2$:$(PH)^2$:: $(BC)^2$:$(SC)^2$, y PM:PH::BC: SC, ó las ordenadas del ege mayor a las ordenadas de su círculo, como el ege menor al mayor: luego *todas las ordenadas de la elipse, esto es, su superficie es a la de dicho circulo, como el ege menor es al mayor.* Del mismo modo se prueba que *la superficie de la elipse es á la del circulo trazado sobre el ege menor, como el ege mayor es al menor.*

Suponiendo $1:c$ la razon del diámetro á la circunferencia, será aac la superficie del círculo SAsa, y abc la de la elipse, haciendo $a:b::aac:abc$; la cual *es igual a la de un círculo cuyo diámetro es* $\sqrt{4ab}$, *esto es, medio proporcional entre sus eges.* Esto prueba que el círculo es una elipse de eges iguales con los focus en el centro, y el diámetro por parametro. Con efecto, cualquiera de las suposiciones $2b=2a$, $SF=\pm a$ ó $p=2a$ convierte las ecuaciones halladas en las del círculo $y^2=2ax-xx$, $y^2=aa-xx$ (348).

383 Llamaremos *parametro* p del 1.er ege una tercera proporcional á él y al 2.° ege; de suerte que sea $2a:2b::2b:p=\frac{4b^2}{2a}$: éste siempre es igual á la nn' doble ordenada al focus (fig. 160); pues como la abscisa $CF=c$, si en $yy=bb-\frac{bbxx}{aa}$, ponemos c en lugar de x, y despues $aa-bb$ en lugar de cc, tendremos $(nF)^2=\frac{b^4}{aa}$, $nF=\frac{bb}{a}$ y $nn'=\frac{2bb}{a}$ $=\frac{4bb}{2a}=p$. Atendiendo á la analogía de las ecuaciones del ege mayor y menor, será el parámetro de éste $q=\frac{4aa}{2b}$: de suerte que sea $2b:2a::2a:q$.

384 De $p=\frac{2bb}{a}$ se saca $bb=\frac{ap}{2}$: pón-

gase este valor en lugar de cc en las ecuaciones al 1.^r ege, y las reducirá á estas $yy = \frac{p}{2a}(2ax - xx)$, $yy = \frac{p}{2a}(aa - xx)$ que son las del parámetro del 1.^r ege. Del mismo modo se reduce la del 2.º ege $xx = \frac{aa}{bb}(bb - yy)$, á $xx = \frac{q}{2b}(bb - yy)$. De las de ambos eges se saca $yy:aa - xx::p:2a$, $xx:bb - yy::q:2b$, ó el *cuadrado de la ordenada al producto de sus abscisas, como el parámetro a su ege.*

385 *Para tirar una tangente á la elipse en un punto* M; se alarga la fM hasta que sea MH=MF, ó fH=Ss, se tira la HE, y la perpendicular TX que la divide por medio, es la tangente al punto M, el unico en que toca la curva: pues si cualquier otro O perteneciese á ella, las OF y Of serian iguales (373) á FM+fM ó á fH, lo que es falso: por ser OF+Of ó OH+Of mayores que fH. El ángulo XMf es igual á TMF, por ser TMF=HMK, y éste á su vertical XMf.

386 Tirada la normal MR (fig. 161), si de los ángulos rectos XMR, RMT se quitan los iguales XMf, TMF (385): resultan iguales los ángulos RMf, RMF, y sera (122) fM:MF::fR:RF, ó (199 *t.* I) fM+MF (2a): MF $(a - \frac{cx}{a})$ (376)::fR+RF(2c):RF $= c -$

$\frac{ccx}{aa} = c - x + \frac{bbx}{aa}$, poniendo $aa - bb$ en lugar de cc: *luego la subnormal* $PR = FR + FP = c - x + \frac{bbx}{aa} + x - c = \frac{bbx}{aa} = \frac{px}{2a}$ (382). Si contando las abscisas desde el vértice se supone $SP = u$; será $x = a - u$, y poniendo este valor en lugar de x; será $PR = \frac{bb}{a} - \frac{bbu}{aa} = \frac{1}{2}p - \frac{pu}{2a}$.

387 En el triángulo ractángulo RMT se tiene (136) la subtangente $PT = \frac{(PM)^2}{PR} = \frac{\frac{bb}{aa}(aa - xx)}{\frac{bb}{aa}x} = \frac{aa - xx}{x} = \frac{2au - uu}{a - u}$, poniendo por x, $a - u$. De consiguiente $CT = CP + PT = x + \frac{aa - xx}{x} = \frac{aa}{x}$, $sT = CT$. $Cs = \frac{aa}{x} - a = \frac{aa - ax}{x}$. De $CT = \frac{aa}{x}$ se saca $x : a :: a : CT$, ó $\div CP : Cs : CT$, por donde se podrá determinar el punto T de la tangente TM.

Ultimamente, la espresion de la normal se saca del triángulo rectángulo MRP en el que $MR = \sqrt{(yy + \frac{b^4xx}{a^4})} = \sqrt{(bb - \frac{bbxx}{a^4}(aa - bb))} = b\sqrt{(1 - \frac{ccxx}{a^4})}$: y la de la tangente

TM del triángulo MPT tambien rectángulo.

388 *Diámetro* de la elipse es una recta MN (fig. 160) que pasa por el centro, y se termina por ambos cabos en la curva: y *diámetro conjugado* al MN, la RZ paralela á TM tangente al punto M de MN: las LQ paralelas á la tangente TM, son sus ordenadas y NQ, QM abscisas: y parámetro de cualquier diámetro una tercera proporcional á dicho diámetro y á su conjugado.

389 *El triángulo tm*P (fig. 162) *formado por la tangente, subtangente y ordenada de una elipse, es igual al trapecio* P*mks que forman la ordenada, la tangente al vértice y una recta que pasa por el centro y el punto k.* Porque en los triángulos semejantes CPm, Csk, es Pm:sk::CP:Cs::Cs:Ct (385): luego Cs:Ct::Pm:sk, y Cs×sk=Pm×Ct, $\frac{1}{2}$(Cs×sk)=$\frac{1}{2}$(Pm×Ct) superficies iguales de los triángulos Cmt, Csk: quítese de ámbos la parte comun PmC, y resultará tmP=Pmks.

390 De aquí se infiere que *el triángulo qlr que forman la ordenada al exe, ol ordenada al diametro* M*m terminada en el exe, y su parte qr comprendida, es siempre igual al trapecio hqsk correspondiente;* pues sacandose de los triángulos semejantes Pmt, qlr, Pmt:qlr::(Pm)^2:(ql)^2 (2cc)::(Cs)^2—(CP)^2:(Cs)^2—(Cq)^2 (378):: Pmks: $qhks$ diferencia de los triángulos semejantes Cks, CPm; Cks, Cqh que están en la misma razon que las diferencias de

los cuadrados de sus lados homólogos Cs, CP, Cq; será Pmt:qlr::Pmks:$qhks$: y como Pmt=Pmks (387), tendremos tambien qlr=$skhq$=$qhmt$ quitando Pmks y añadiendo su igual Pmt. De consiguiente el triángulo loh será igual al trapecio correspondiente $mort$: pues si de qlr=$qhmt$ se quita $qhor$ comun, queda loh=$mort$. Tambien será CND=Cmt; pues cuando lr se concibe bajar paralelamente á ser CN, la lh que se ha de terminar en el diámetro mM alargado si es menester, vendrá á ser ND: y siendo CND=Cnd por la simetría de la elipse cuyos puntos M, m, N, n deben estar semejantemente situados; será Cnd=Cmt.

391 Esto supuesto, en los triángulos semejantes Cmt, Cor se tiene (200) $(Cm)^2$: $(Co)^2$::Cmt:Cor, y (199 *t.* I) $(Cm)^2-(Co)^2$: $(Cm)^2$::Cmt − Cor=$mort$:Cmt::loh:Cdn (388):: $(lo)^2$: $(Cn)^2$ en los triángulos Cdn, loh semejantes por la igualdad de los ángulos alternos h, d que forman las paralelas lq, nd; y de l igual á su alterno lQC=dnC: luego $(Cm)^2$ — $(Co)^2$: $(Cm)^2$:: $(lo)^2$: $(Cn)^2$: es decir, llamando á Mm, $2a$; Nn, $2b$; lo, y; Co, x; $aa-xx$:aa::yy:bb; y de consiguiente, $yy=bb-\frac{bbxx}{aa}$, ecuacion á las ordenadas de los diámetros del todo semejante á la de los eges; y de la que como de estas, se saca tambien que á cada abscisa corresponden dos ordenadas iguales: que los diámetros dividen sus ordena-

das y la elipse por medio: que CM=Cm, CN=Cn &c.

392 *Si se bajan al ege Ss las ordenadas mP, nz, de los estremos m, n de los diametros conjugados Mm, Nn, el cuadrado de Cz comprendido entre el centro y una de ellas nz, es igual al producto de las abscisas PS×Ps de la otra mP*, ó $(Cz)^2 = PS \times Ps$. Haciendo $mP = y$, y $sP = x$, $Sz = z$, $Ss = 2a$, $Bb = 2b$; en los triángulos semejantes tPm, Cnz se tiene $(Cz)^2 : (Pt)^2 :: (mP)^2 : (nz)^2 :: PS \times Ps : zS \times zs$ (378); esto es, $PS \times Ps\ (aa - xx) : zS \times zs\ (aa - zz) :: (PT)^2$ $\left(\frac{aa - xx}{ax}\right)(384):(nz)^2 (zz) = \frac{(aa - zz)\ (aa - xx)^2}{xx\,(aa - xx)}$: de donde se saca $zz = aa - xx$, ó $(Cz)^2 = PS \times sP$.

393 Del mismo modo se hubiera sacado $(CP)^2 = zS \times zs$, y de consiguiente si en lugar de $aa : bb :: zS \times zs : (nz)^2$ (378), ponemos $aa : bb :: (CP)^2 (xx) : (nz)^2 = \frac{bbxx}{aa}$, tendrémos $(Cn)^2 = (Cz)^2 + (nz)^2 = aa - xx + \frac{bbxx}{aa}$: y como tambien $(Cm)^2 = (CP)^2 + (Pm)^2 = xx + bb - \frac{bbxx}{aa}$; sacarémos sumando y reduciendo, $(Cm)^2 + (Cn)^2 = aa + bb$, *o la suma de los cuadrados de los diámetros igual á la de los eges.*

394 Siendo $nz = u$, $Sz = z$, será $uu = \frac{bb}{aa}(aa - zz)$ (376), y $\frac{aauu}{bb} = aa - zz$: y como

$aa - zz = (CP) = xx$ (390); será $\frac{aauu}{bb} = xx$, y $aauu = bbxx$ ó $au = bx$ Tírese ahora la CH perpendicular á Tl, y en los triángulos semejantes Czn, CtH donde Cz:$zn(u)$::Ct $\left(\frac{aa}{x}\right)$ (385): CH, será Cz×CH$=\frac{u \times aa}{x}$, ó poniendo bx en lugar de au, Cz×CH$=ab$; es decir, *que es igual el paralelógramo formado de los semieges a el de los semidiámetros, y de consiguiente el de los eges á el de los diámetros.*

395 Cuando z cae en P, es $y = u$, $z = x$, y $zz = aa - xx$ viene á ser $xx = aa - xx$, ó $xx = \frac{1}{2} aa = a \times \frac{1}{2} a$: que da $a : x :: x : \frac{1}{2} a$. Luego si se toma CP media proporcional entre a y $\frac{1}{2} a$, y se tira por P una doble ordenada, determinará esta dos puntos por los cuales y el centro se pueden tirar dos diámetros iguales; pues sus mitades serán hipotenusas de los triángulos iguales CPm, CPn: y como á cada lado solo en un punto se verifica la anterior proporcion, y uno y otro dan unos mismos diámetros; no habrá en la elipse mas que dos diámetros iguales.

396 *Si dado uno de los eges y su parámetro, se pidiese trazar la elipse*; se buscará una media proporcional entre los dos datos que será el otro ege (381), y se hará lo que dejamos dicho (373). Pero si se diesen dos diámetros conjugados Ss, Bb (fig. 163) que for-

men cualquier ángulo; se tomarán sobre la mitad CB de uno de ellos las partes iguales CE, EE′ &c. y tiradas las perpendiculares CD, ED′ &c. que encuentren la circunferencia de un círculo descrito desde C con el radio CB; se tirará SB, y por E su paralela EP: tómense hácia s y S partes iguales á CP, y tirando despues por los puntos P, las PM iguales cada una á su correspondiente ED′, quedarán determinados los puntos M por donde se ha de trazar la elipse, determinando los demas m, haciendo Pm=PM. Efectivamente, en los triángulos semejantes CSB, CPE se tiene CS(a):CB(b)::(CP)(x).CE$=\frac{bx}{a}$; y en el triángulo rectángulo CED′ es $(ED')^2=(PM)^2=(CD')^2-(CE)^2$, esto es, $yy=bb-\frac{bbxx}{aa}$, ecuacion á la elipse, á la que pertenecerán los puntos M, m.

De la hipérbola

397 Es propiedad constante de esta curva que la diferencia entre las rectas FM′, fM′ (fig. 164) tiradas desde cualquiera de sus puntos M′ á los dos f, F que son los *focus*, es siempre igual á su *primer ege* Ss: de consiguiente si habiendo fijado en f una regla fMO mobil al rededor de dicho punto, y en su estremo O el de un hilo atado por el otro cabo en F, se voltea la regla al rededor de f,

llevando la parte MO del hilo unida á ella y tirante todo el hilo con un lapiz M′: señalará este la porcion SH de una hipérbola; pues la diferencia entre todas las fM', FM' será siempre igual á la que hay entre el hilo y la regla, y se ve que en el punto S esta diferencia es Ss. La otra mitad SG de la curva se describe volviendo la regla hácia aquel lado: y para trazar la hipérbola *gsh* opuesta, se truecan las posiciones fijando la regla en F. El hilo ha de ser siempre desigual con la regla; pues si no, saldrian todos los puntos M′ igualmente distantes de F y f; por ser $OMf = OM'F$, y $Mf = M'F$ quitando OM' comun, y trazaria el lapiz una linea recta.

398 *Segundo ege* de la hipérbola es una linea Bb perpendicular al primero Ss, cuya mitad CB es lado de un triángulo rectangulo, cuya hipotenusa SB es igual á CF, y el otro lado CS es la mitad de Ss: las perpendiculares PM, MQ al 1.° y 2.° eges son sus ordenadas, CQ, y SP, sP las abscisas; las fM', FM' son los *radios vectores*. TM (fig. 165) es una *tangente*, PT la *subtangente*, MR y PR la *normal* y *subnormal* correspondientes al punto M. Ultimamente, la recta MCM' (fig. 170) que pasando por el centro C corta las hipérbolas opuestas, se llama *diámetro*, y su *conjugado* será la DCd paralela á la tangente Tt al punto M del 1.r diámetro, cuyas coordenadas son mQ y CQ.

399 Esto supuesto, si se hace $Ss = 2a$ (fig. 164) $Bb = 2b$, $CF = Cf = c$, $CP = x$, y $PM = y$; será $SP = CP - CS = x - a$, $sP = sC + CP = x + a$, y $SP \times sP = (x-a)(x+a) = xx - aa$. Tambien será $PF = CP - CF = x - c$, $Pf = PC + Cf = x + c$, y $PF \times Pf = xx - cc$: y en el triángulo rectángulo CSB tendremos $(BS)^2$ ó (396) $(CF)^2 = (BC^2) + (CS)^2$ ó $cc = aa + bb$, y $bb = cc - aa = (c+a)(c-a)$: de donde se saca $c - a : b :: b : c + a$ ó ∺ SF:CB:sF: esto es, *el semiege menor medio proporcional entre las distancias de uno de los focus á los vértices.*

400 Tómese ahora $PR = FP$, y tirada la MR, se tendrá en el triángulo fMR (283) $fM - MR\ (2a) : fP - PR\ (2c) :: fR\ (2x) : fM + FM = \frac{2cx}{a}$. De esta suma y de la diferencia $fM - FM = 2a$, se sacará (101 *t.* I) $fM = \frac{cx}{a} + a$, y $FM = \frac{cx}{a} - a$, y en el triángulo rectángulo PMF, en el que $(PM)^2 = (FM)^2 - (PF)^2$, será $yy = \frac{ccxx}{aa} - 2cx + aa - xx + 2cx - cc$, poniendo $aa + bb$ en lugar de cc (397), y reduciendo, $yy = \frac{bbxx}{aa} - bb = \frac{bb}{aa}(xx - aa)$, ecuacion á la hipérbola diferente de la de la elipse en solos los signos (376). Si poniendo en S el origen de las abscisas, hacemos $SP = x$, $SF = sf = c$; será $SP \times Ps = x(2a + x) = 2ax + xx$: póngase este produc-

to en lugar de $xx-aa$ en la ecuacion anterior, y se convertirá en $yy=\frac{bb}{aa}(2ax+xx)$.

401 De $yy=\frac{bb}{aa}(xx-aa)$ se saca $y=\frac{b}{a}\times\sqrt{(xx-aa)}$, de consiguiente, á cada abscisa CP corresponderán dos ordenadas iguales PM positiva y Pm negativa, que van siendo mayores á proporcion que es mayor x; de suerte que tendrá la curva dos ramos iguales é infinitos. Si se supone en dicha ecuacion $y=0$, resulta $x=\pm a=$CS$=$Cs, es decir, que la curva pasa por S y s: de suerte que tomando á x menor que a, saldrá imaginaria la cuantidad $\pm\frac{b}{a}\sqrt{(xx-aa)}$, ó no habrá curva entre S y s; pero si tomamos á x negativa, y mayor que a, resultarán dos valores positivos de y á cada valor de x, y comenzará en s otra curva opuesta é igual á la primera; pues tomando CP$=$CP$'$, será PS$\times$P$'s=$P$'$S$\times$P$'s$, y de consiguiente PM$=$P m. Ultimamente, dando diferentes valores á x podremos determinar por medio de los que resulten de y, diferentes puntos M de la hipérbola que será facil trazar por ellos.

402 Comparando las ecuaciones de dos diferentes ordenadas Y, y del 1.^{r} ege, cuyas abscisas sean X, x, tendremos yy : YY:: $\frac{bb}{aa}(xx-aa)$: $\frac{bb}{aa}(XX-aa)$::$xx-aa$:XX$-aa$,

y *los cuadrados de las ordenadas serán como el producto de sus abscisas* segun lo demostramos (358). De $yy=\frac{bb}{aa}(xx-aa)$ se saca $yy:xx-aa::bb:aa$, y poniendo $cc-aa$ en lugar de bb(397); $yy:xx-aa::cc-aa:aa$, ó que *el cuadrado de una ordenada es al producto de sus abscisas, como el producto de las distancias de uno de los focus á los estremos del ege, es al cuadrado de la mitad de dicho ege.*

403 Pues que la abscisa $CP=x$ es igual á la ordenada MQ del 2.° ege y su abscisa CQ igual á la ordenada $PM=y$, con despejar xx en la ecuacion $yy=\frac{xx}{aa}-bb$; tendremos la del 2.° ege $xx=\frac{aayy}{bb}+aa$: de la cual se saca $xx:yy+bb::aa:bb::4aa:4bb$, es decir que *el cuadrado* $(MQ)^2$ *de una ordenada del 2.° ege es a la suma de los cuadrados* $(QC)^2+(Cb)^2$, *como el cuadrado del 1.^r ege al del 2.°* Tambien se ve que á cada abscisa corresponden dos ordenadas iguales una positiva y otra negativa &c.

404 Si hacemos $2a:2b::2b:p=\frac{2bb}{a}$, tendremos el parámetro del 1.^r ege que es una tercera proporcional á dicho ege y al 2.°, y es igual á la doble ordenada Na que pasa por el focus; pues si en $yy=\frac{bbxx}{aa}-bb$ po-

nemos c en lugar de x, y en el resultado sustituimos $aa+bb$ á cc (397); tendremos $yy = (NF)^2 = \frac{b^4}{aa}$, $NF = \frac{bb}{a}$, y $Nn = \frac{2bb}{a}$. De $p = \frac{2bb}{a}$ se saca $bb = \frac{ap}{2}$, y este valor puesto en lugar de bb en las ecuaciones del 1.^r ege las convierte en estas $yy = \frac{p}{2a}(2ax+xx) = px + \frac{pxx}{2a}$, $yy = \frac{p}{2a}(xx-aa) = \frac{pxx}{2a} - \frac{pa}{2}$, que son las del parámetro del 1.^r ege, y de las que se infiere que $yy : xx-aa :: p : 2a$ ó *el cuadrado de una ordenada al 1.^r ege es al producto de sus abscisas, como su parámetro á dicho ege.*

405 Tambien $q = \frac{2aa}{b}$ es el perámetro del 2.º ege, tercera proporcional á él y al 1.º y su ecuacion, poniendo $\frac{bq}{2}$ por aa en $xx = \frac{aayy}{bb} + aa$, es $xx = \frac{qyy}{2b} + \frac{bq}{2} = \frac{q}{2b}(yy + bb)$: de la que se saca $xx : yy+bb :: q : 2b$, es decir, que *el cuadrado de una ordenada al 2.º ege es á la suma de los cuadrados* $(CQ)^2 + (Cb)^2$, *como su parametro á dicho ege.*

406 Si tiradas las FM, fM (fig. 165) á los focus, se toma MH = MF, y sobre FH se levanta la perpendicular Td, será tangente á la hipérbola en M: pues si de cualquier otro punto m de la MT, se tiran las mH, mf,

mF, $mf-mF=mf-MH$ es mayor que $Mf-MF=fH$; y siendo $mH+Hf$ mayor que mf, el punto m no pertenece á la hipérbola (395); y lo mismo se probará de cualquier otro que no sea M. Como los ángulos FMT, TMf son iguales, y TMf=NMm, serán FMT y NMm también iguales.

407 En el triángulo fMF se tiene (122) $fM:MF::fT:TF$, y $fM+MF$ $\left(\frac{2cx}{a}\right)$:$Mf\left(a+\frac{cx}{a}\right)$ (398) :: $fT+TF$ $(2c)$:$fT=\frac{aa}{x}+c$: luego $fT-Cf=CT=\frac{aa}{x}$: y será CP (x): CS (a):: Cs (a): CT $\left(\frac{aa}{x}\right)$, proporcion que determinará el punto T de la tangente: y como al paso que crece x, disminuye $\frac{aa}{x}$ ó CT; pasarán todas las tangentes á la hipérbola por los puntos T situados entre C y S, hasta que suponiendo x infinita, $\frac{aa}{x}$ ó CT se reduzca á cero, y el punto T se confunda con C.

408 Sea pues 1.º la subtangente $PT=CP-CT=x-\frac{aa}{x}=\frac{xx-aa}{x}$. 2.º En el triángulo rectángulo TPM la tangente $TM=\sqrt{((PM)^2+(PT)^2)}=\sqrt{\left(\frac{bb}{aa}(xx-aa)+\ldots\right.}$

$\frac{xx-aa}{x})^2) = \sqrt{(\frac{bbxx}{aa} + xx - aa) \times \frac{xx-aa}{xx}}$.

3.° La subnormal $PR = \frac{(PM)^2}{PT} = \frac{\frac{bb}{aa}(xx-aa)}{\frac{xx-aa}{x}} =$

$\frac{bbxx}{aa} = \frac{px}{2a}$, ó $\frac{1}{2}p + \frac{pu}{2a}$, haciendo $SP = u = x - a$

4.° Ultimamente, en el triángulo rectángulo MRP la normal $MR = \sqrt{((PM)^2 + (PR)^2)}$ $= \sqrt{(\frac{b^4xx}{a^4} + \frac{bb}{aa}(xx-aa))}$.

409 *Si del centro de la elipse ó de la hipérbola se tira la* CK (fig. 166 y 167), *será igual á* a; pues siendo $CF = Cf$, y $FK = KH$, será Ff: FC:: fH: CK: y así como $CF = \frac{1}{2}fF$, será $CK = \frac{1}{2}fH = \frac{1}{2}(fm \pm mF) = a$. De consiguiente, 1.° descrito un círculo desde C con el radio $CS = a$, terminarán en su circunferencia las perpendiculares FK, fd tiradas de los focus sobre la tangente alargada si es menester: porque siendo recto el ángulo KdD, y estando K en dicha circunferencia; lo estará tambien el punto D de la DK que debe ser diámetro (69).

410 2.° *El producto* $fd \times FK$ *de dichas perpendiculares bajadas de los focus á la tangente, es siempre igual á bb cuadrado del semiege menor*; pues siendo $FK = KH = fD$ por razon de las paralelas DK, fH; tendrémos (142) $fd \times fD = fd \times HK = fs \times fS = aa-$

$cc=bb$ (375) en la elipse: y en la hipérbola por razon de las secantes (143), $fd\times FD=fd\times FK=fs\times fS=cc-aa=bb$ (397).

311 3.° *Las perpendiculares* FK *bajadas del focus* F *á la tangente en diferentes puntos m de la elipse y de la hipérbola, crecen mas que las raices de los radios vectores en la elipse, y menos en la hipérbola*: pues en los triángulos fmd, FmK semejantes por las paralelas y los ángulos en d y K rectos, se tiene $fm:fd::Fm:FK=\frac{fd\times Fm}{fm}$, y multiplicando por FK, $(FK)^2=FK\times fd\times\frac{Fm}{fm}=bb\times\frac{Fm}{fm}$. Si llamanos P, p dos perpendiculares FK, FK', y R, r; R', r', sus radios vectores FM, fm; FM', fm'; tendrémos $PP:pp::bb\times\frac{R}{r}:bb\times\frac{R'}{r'}::\frac{R}{r}:\frac{R'}{r'}$, y $P:p::\sqrt{\frac{R}{r}}:\sqrt{\frac{R'}{r}}$. Y como la elipse en la que $R+r=2a$, disminuye r aumentando R, crecerá la razon de las fracciones $\frac{R}{r}:\frac{R'}{r'}$ mas, que si siendo constante r, aumentase R: y al contrario, en la hipérbola en donde $r-R=2a$, r aumenta creciendo R; será menor dicha relacion de $\frac{R}{r}:\frac{R'}{r'}$; luego &c.

412 Tirada Sl (fig. 165) paralela á MP, los triángulos semejantes Tsl, TMP

dan TP:PM::TS=CS−CT:Sd, ó $\frac{xx-aa}{x}$:........ $\frac{b}{a}\sqrt{(xx-aa)}::a-\frac{aa}{x}$: S$d=\frac{b\sqrt{(xx-aa)}}{x+a}=b\sqrt{\frac{(x+a)(x-a)}{(x+a)(x+a)}}=b\sqrt{\frac{(x-a)}{(x+a)}}$. Esta espresion se reduce á Sd=b cuando x es infinita, en cuyo caso se desprecian como demostrarémos despues (442), a y $-a$: y de consiguiente si tomando Sa=SA=b, se tiran por A, a y C las LK, lk; seran tangentes de la hipérbola á una distancia infinita (405), y se llaman sus *asintotas*: las cuales se van acercando á la curva sin llegar á tocarla. Sus ordenadas á la asíntota lk son las Mm (fig. 168) paralelas á la otra asíntota LK; y sus abscisas Cm.

413 *Si se alarga una ordenada* PM *hasta las asintotas, será siempre* Mn×MN=bb=(Sd)^2 ó ÷ Mn:Sd:MN; pues sacándose de los triángulos semejantes CSd, CPn, CS:Sd::CP:Pn, ó a:b::x:P$n=\frac{bx}{a}$; será Mn=Pn−PM $=\frac{bx}{a}-y$, MN = PN + PM $=\frac{bx}{a}+y$; y Mn×MN $=\frac{bbxx}{aa}-yy$: pongase $\frac{bb}{aa}$×........ $(xx-aa)$ en lugar de yy, y saldrá reduciendo, Mn×MN=bb. Siendo P$n=\frac{bx}{a}$, (Pn)$^2=\frac{bbxx}{aa}$, y la correspondiente (PM)$^2=\frac{bbxx}{aa}-yy$; es claro que ningun punto de la hipérbola

podrá encontrar el correspondiente n de la asíntota: y como $Mn \times MN = bb$ ó $Mn = \frac{bb}{MN}$ miéntras mayor sea MN, será menor $\frac{bb}{MN}$ ó Mn, que irá disminuyendo hasta el infinito: es decir, la asíntota se acercará mas y mas á la curva sin jamas encontrarla.

414 Del mismo modo que acabamos de decir se demuestra que $Qx \times xq = bb = Mn \times MN$: de consiguiente *si se tiran dos ó mas paralelas* Hh, Ep *terminadas en los asíntotas, y que corten la hipérbola en* x, c, c, r, *se tendrá* $Hx \times hx = Er \times rp$: pues suponiendo tiradas las Nn, Qq perpendiculares á SP en los triángulos HxQ, NrE, hxq, rnp semejantes á causa de las paralelas Nn, Qq; se tendrá $Hx:Er::Qx:Nr$, y $xh:rp::xq:rn$: donde multiplicando ambas proporciones, resulta $Hx \times xh$: $Er \times rp$:: $Qx \times xq$: $Nr \times rn$: luego $Hx \times xh = Er \times rp$, así como $Qx \times xq = Nr \times rn$: por la misma razon $cp \times Ec = ch \times cH$.

415 Si se mueve la Ep paralelamente hasta confundirse con la Tt tangente á la curva en el punto R, en el que concurren los dos r, c; se verificará como ántes $Hx \times xh = RT \times Rt$, como tambien $ch \times cH = Rt \times RT$: luego $Hx \times xh = ch \times cH$, esto es, $Hx\,(xc + ch) = ch\,(xc + xH)$, que se reduce quitando $Hx \times ch$ comun, á $Hx = ch$, y de consiguiente $Rt = RT$, es decir, *que son iguales las partes de cualesquiera rec-*

tas comprendidas entre la curva y las asintotas.

416 Luego 1.º si dada la ordenada RO, se toma OT=OC, la Tt tirada por T y R; será la tangente correspondiente á RO: pues siendo en los triángulos semejantes TOR, TCt, Tt:TR::TC:TO; será TR=Rt como TO=OC. 2.º El producto MM'×Mh de las ordenadas paralelas al 1.er ege es aa: pues en los triángulos semejantes Mhn, MM'N, CSD, Mh:CS::Mn:SD, y MM':CS::MN:SD; luego Mh×MM':(CS)^2 (aa)::Mn×MN(bb): (SD)^2(bb): y Mh×MM'=(CS)^2=aa. 3.º Ultimamente, *para trazar una hiperbola entre las asintotas* Cl, CL *que pase por un punto dado* x; se tirarán por él las Hh, Qq &c. y tomando ch=Hx, vq=xQ &c. pertenecerán á la hipérbola los puntos c, v &c.

417 Tiradas Sg y Mm paralelas á LK, y ZM paralela é igual á Cm, y llamando m la Sg=AC; Cm, x, y Mm, y; se tendrá en los triángulos semejantes Mnm, Sdg, ZMN, Sd:Sg::Mn:Mm, y Sd:gd::MN:MZ: y multiplicando estas proporciones (Sd)^2:Sg×gd::Mn×MN:Mm×MZ; ó por ser gd=Sg en el triángulo isósceles Sgd, (Sd)^2 (bb):(Sg)^2 (mm)::Mn×MN(bb): Mm×MZ(xy): luego bb×xy=mm×bb, y xy=mm, ecuacion á la hipérbola entre las síntotas, en la que por ser $y=\frac{mm}{x}$, irá y menguando hasta el infinito, á pro-

porcion que crezca x, y la asíntota nunca tocará la á hipérbola. Si suponemos otra ordenada $Y = \frac{mm}{X}$, tendremos $YX = mm = yx$, y $Y:y::x:X$, ó *las ordenadas á las asíntotas estarán en razon inversa de las abscisas.* El cuadrado mm se llama *potencia de la hipérbola*, y su valor sacado del triángulo rectángulo CSb, donde $(Sg)^2 = \frac{1}{4}((CS)^2 + (Cb)^2)$, es $mm = \frac{aa + bb}{4}$.

418 Estén en proporcion geométrica las abscisas CX, CU, CG, Cc, (fig. 169) y será $CU - CX:CX::CG - CU:CU::Cc - CG:CG$ &c. y como los consecuentes son geométricamente proporcionales, lo serán tambien los antecedentes XU, UG, Gc &c diferencias de las abscisas. Si los cuadriláteros XKYU, YUGZ &c. se conciben formados de los pequeños rectángulos $UuYy$, $gGZt$ que tienen las ordenadas UY, GZ por altura, y por bases uU, gG, partes semejantes de XU, UG: será $uU:gG::XU:UG$: y como $XU:UG::CX.CU::CU:CG::GZ:YU$ por estar las ordenadas en razon inversa de las abscisas (415); será $uU.gG::GZ:YU$, y $uU \times YU = gG \times GZ$, ó $gGZt = UYyu$. Lo mismo se podrá demostrar de los demas rectangulos que componen los cuadrilateros: luego estos son iguales: y si suponemos que XUYK sea 1, será XGZYK $= 2$, XcNZK $= 3$ &c. y *creciendo las abscisas en progresion geometrica*, es-

tarán los espacios asintóticos en progresion aritmética.

419 Si se tiran las CK, CY, CZ &c. *los sectores hiperbólicos* CYK,CYZ *son iguales á los cuadriláteros* XUYK,UGZY: pues siendo iguales los triángulos CXK, CUY (199) por tener sus bases en razon inversa de sus alturas; si se quita CoX comun y se añade á los dos residuos oKY, resultará CKY=KXUY, y así de los demas: *luego si las abscisas son términos de una progresion geométrica, serán dichos espacios los correspondientes en la aritmética, ó serán sus logaritmos.*

420 Lo primero que hay que saber de los diámetros es *que ambos se dividen por medio en el centro* C (fig. 170): *y que el segundo es igual á la tangente* Tt: pues tiradas las MD, Md, en el paralelógramo DMtC, es DC=Mt, luego pues que TM=Mt (413); será DC=Cd, Dd=Tt. Tomando ahora CP=CP, y tirando las MP,M'P', en los triángulos rectángulos iguales CPM, CP'M' se tendrá CM=CM'; luego &c. De consiguiente dados los dos diámetros conjugados MM',Dd, se tendrán las asíntotas, trazando por el centro C las CL, Cl paralelas á las DM, dM tiradas al 2.° diámetro Dd desde un estremo M del 1.°: y al contrario, dadas las asíntotas CL, Cl y un punto M de la curva, se tendrán los diámetros, tirando MH paralela á Cl, tomando HD=HM; y las DC, MC tiradas

al centro serán los semidiámetros: pues si se traza MT paralela á DC; serán iguales los triángulos CDH, THM, á causa de las paralelas y de DH=HM; luego TM=DC: y como TM es tangente por ser TH = HC, será DC el 2.º semiege.

421 Llamemos MM′, $2a$; Dd ó Tt, $2b$; la ordenada mQ, y; CQ x: y será $MQ=x-a$, $M'Q=x+a$: y en los triángulos semejantes CMT, CQN, CM (a):CQ (x)::MT (b):....... $QN=\frac{bx}{a}$: luego $mN=NQ-QM=\frac{bx}{a}-y$, $mn=NQ+Qm=\frac{bx}{a}+y$, $mN\times mn=\frac{bbxx}{aa}-yy$: y siendo $mN\times mn=bb$ (411); será finalmente $\frac{bbxx}{aa}-yy=bb$, y de consiguiente $yy=\frac{bbxx}{aa}-bb$, ecuacion á las ordenadas del 1.^r diámetro de la hipérbola. La de las ordenadas del 2.º por ser $Cp=mQ=y$, y $CQ=mp=x$; será despejando xx en la anterior, $xx=\frac{aayy}{bb}+aa$. Ambas son en todo semejantes á las de los eges, y de consiguiente podremos de ellas inferir tambien que á cada abscisa corresponden dos ordenadas iguales en cada diámetro: que á uno y otro corta la curva en dos puntos: que el cuadrado de la ordenada á un diámetro es al producto de sus abscisas, como el cuadrado de su conjugado

al de dicho diámetro: que el parámetro de un diámetro es una tercera proporcional á él y á su conjugado &c. y así de todas las demas propiedades, escepto las de los focus.

422 *Si de los estremos d*, M *de los diámetros* Dd, MM' *se bajan dos ordenadas do*, MP *al* 1.^r^ ege, *será el cuadrado de* Co *comprendida entre la una do y el centro* C, *igual al producto* PS×Ps *de las abscisas de la otra ordenada* MP: *y el cuadrado de* CP *igual á la suma de los cuadrados* $(Co)^2+(Cs)^2$.

Supongamos que sobre B*b* alargado se toman $CE'=CE=CF$, y se trazan por B, *b* dos hipérbolas, cuyos focus sean E, E' que se llaman *conjugadas* á las primeras: sea $CS=a$, $CB=b$, $CP=x$, $Co=z$; será $oS\times os=aa-zz$, $SP\times sP=xx-aa$. Por la propiedad de la hipérbola (400) $(PM)^2 : PS\times Ps :: bb:aa :: (do)^2 : (Cs)^2+(Co)^2$ (401), ó $PS\times Ps : (Cs)^2+(Co)^2 :: (PM)^2 : (do)^2 :: (PR)^2 : (Co)^2$ en los triángulos semejantes C*od*, RPM: luego $PS\times Ps\ (xx-aa) : (Cs)^2+(Co)^2\ (aa+zz) :: (PR)^2 \ldots\ldots \left(\frac{xx-aa}{xx}\right)^2$ (406) $: (Co)^2 (zz) = \frac{(aa+zz)\ (xx-aa)}{xx(xx-aa)}$; de donde se saca $zz=xx-aa$ ó $(Co)^2=PS\times Ps$, y $xx=zz+aa$ ó $(CP)^2=(Cs)^2+(Co)^2$.

423 Si en la proporcion $(do)^2 : (Cs)^2+(Co)^2 :: bb:aa$ (401), ponemos por $(Cs)^2+(Co)^2$ su igual xx (420); se mudará invirtiéndola, en $aa:bb::xx : (do)^2=\frac{bbxx}{aa}$: de con-

siguiente será $(Cd)^2 = (Co)^2 + (do)^2 = xx - aa + \frac{bbxx}{aa}$: tambien $(CM)^2 = (CP)^2 + \ldots\ldots (PM)^2 = xx + \frac{bbxx}{aa} - bb$: réstese una ecuacion de otra, redúzcase y se tendrá $(CM)^2 - (Cd)^2 = aa - bb$; y será *la diferencia de los cuadrados de los eges de la hiperbola igual á la de los cuadrados de sus diámetros.*

424 Bajada sobre Tt la perpendicular Ca, se saca de los triángulos semejantes CaR, RPM, $RM: PM :: CR : Ca = \frac{PM \times CR}{RM}$: tambien $PR : RM :: Co : Cd = \frac{RM \times Co}{PR}$ en los triángulos semejantes Cod, RPM: luego $Cd \times Ca = \frac{PM \times CR \times RM \times Co}{RM \times PR} = \frac{PM \times CR \times Co}{PR}$, y $(Cd)^2 \times (Ca)^2 = \frac{(PM)^2 \times (CR)^2 \times Co}{(PR)^2}$: póngase por $(PM)^2$, $\frac{bb}{aa}(xx - aa)$, por $(CR)^2$, $\frac{a^4}{xx}$ (405); $xx - aa$ por $(Co)^2$ (420), y $\left(\frac{xx - aa}{xx}\right)$ en lugar de $(PR)^2$; y resultará despues de reducir, $(Cd^2) \times (Ca)^2 = aabb$, y Cd ó $CD \times Ca = ab$, ó el paralelogramo DTMC de los semidiámetros igual al de los semieges: luego *el paralelógramo formado de los diámetros de la hipérbola es igual al que forman los eges.*

425 Dados los dos diámetros Ss 1.°, y Bb 2.° (fig. 171) que formen cualquier ángu-

lo, se podrá trazar la hipérbola; tomando sobre el semidiámetro CS alargado cualquier número de partes iguales CE, EE' &c. tirando por E la EP paralela á SB, tomando en CB y Cb partes iguales á CP, y levantando en C la CD perpendicular é igual á Cs; pues si por los puntos P se corta cada paralela PM igual á su correspondiente ED; todos los puntos M pertenecerán á la hipérbola: porque siendo $Ss=2a$, $Bb=2b$, $CP=y$, $PM=x$; se tendrá en los triángulos semejantes CSB, CEP, CB: CS:: CP: CE, ó $b:a::y:CE=\frac{ay}{b}$: y en el triángulo rectángulo ECD donde $(DE)^2$ ó....... $(PM)^2=(CE)^2+(CD)^2$; será $xx=\frac{aayy}{bb}+aa$, ecuacion al 2.º diámetro de la hipérbola (401): y verificandose esto en los demas puntos, pertenecerán á la hipérbola.

426 Cuando los eges ó diámetros son iguales, se llama la hipérbola *equilátera*: y basta entonces para trazarla, levantar la CR perpendicular é igual á CB; pues tirando por cualquier punto P' la MP'M' paralela á Ss, y tomando P'M' y P M iguales á P'R: serán M, M' puntos de la hipérbola; porque en el triángulo rectángulo CP'R se tiene $(P'R)^2$ ó $(P'M)^2=(CP')^2+(CR)^2$, esto es, $xx=yy+aa$. Esta misma es la ecuacion á los eges cuando son iguales, ó cuando la hipérbola es equilátera; en cuyo caso forman las asíntotas con los eges un ángulo de 45°.

427 La ecuacion $yy=px \pm \frac{pxx}{2a}$ incluye las de la elipse é hipérbola con relacion á su parámetro, segun se ha visto (382 y 402): y como cuando el ege $2a$ es infinito, como sucede en la parábola, dicha ecuacion se reduce omitiendo $\pm \frac{pxx}{2a}$ que entonces es cero, á $yy=px$ que lo es de la parábola; podremos considerar á $yy=px \pm \frac{pxx}{2a}$ como ecuacion general de las tres secciones cónicas, contando sus abscisas desde el vértice; en la cual sacando los valores de las diferentes lineas que en ellas hemos calculado, se podrán facilmente comparar, para observar mejor sus relaciones recíprocas.

428 La subnormal por eg. segun hemos visto (384 y 406), es $\frac{1}{2}p \pm \frac{px}{2a}$ en la elipse é hipérbola, y $\frac{1}{2}p$ en la parábola (368) en la que $\pm \frac{px}{2a}=0$. Si en $yy=px \pm \frac{pxx}{2a}$ se pone en lugar de y, $\frac{1}{2}p$ ordenada al focus; resulta $\frac{1}{4}pp=px \pm \frac{pxx}{2a}$, y $p=4x \pm \frac{2x^2}{a}$; es decir, que el parámetro es cuádruplo de la distancia del vértice al focus en la parábola, mas que cuádruplo en la hipérbola, y menos en la elipse &c.

429 Finalmente, *si dada una porcion de seccion cónica, se pidiese cuál es de las*

tres, *y la posicion de sus eges:* habiendo tirado dentro de ella dos lineas paralelas terminadas por ambos cabos en la curva, y por su mitad una recta; será esta uno de sus diámetros (369, 386 y 396): búsquese del mismo modo otro, y si saliese paralelo al primero; será la curva una parábola, cuyo ege se hallará tirando por el vértice una paralela á cualquiera de los dos diámetros encontrados. Si el 2.° diámetro corta al 1.° dentro de la curva, será esta una elipse: y si le corta fuera, una hipérbola. En estos casos si se traza un arco desde el centro de la seccion que corte la curva en dos puntos, y tirando por ellos una recta, se le baja una perpendicular desde dicho centro; será esta uno de los eges, y el otro debe ser una perpendicular al ege encontrado.

430 Por medio de los esponentes indeterminados se representan con una sola ecuacion infinidad de curvas de diferente órden. Si en el círculo suponemos a el diámetro, y en lugar de $x:y::y:a-x$ (348), hacemos $x^m: y^m:: y^n: (a-x)^n$; representará la ecuacion $y^{m+n}=x^m\times(a-x)^n$ la naturaleza de los círculos de todos géneros; y de ella resultará la del círculo ordinario suponiendo $m=1$, $n=1$. Con otros valores salen diferentes ecuaciones de curvas que se llaman círculos, por la analogía de su ecuacion con la del ordinario.

431 Si hacemos en la parábola $p^m : y^m ::$

$y^n : x^n$ (357); se tendrá la ecuacion á las parábolas de diferentes órdenes. Suponiendo a el primer ege de la hipérbola, se tiene y^2: $x(a+x)::p:a$ (402): de consiguiente será y^{m+n}: $x^m(a+x)^n::p:a$, y la ecuacion $y^{m+n}=\frac{p}{a}\times x^m\times(a+x)^n$, ó $\frac{a}{p}\, y^{m+n}=x^m(a+x)^n$ la ecuacion á las hipérbolas de todos géneros: así como $x^m y^m=c^{n+m}$ lo es á las mismas entre las asíntotas; pues sacándose de $xy=c^2$ (415), $y:c::c:x$; será tambien $y^m:c^m::c^n x^n$: (c es la potencia de la hipérbola).

ARTÍCULO IV

Noticia de algunas curvas en particular

432 *Concoide de Nicomédes.* Si por un punto cualquiera B (fig. 193) se tiran á una recta GH lineas BQM, BAD &c. y tomando QM=AD, Qt=Ad, se hace pasar una curva por M, D &c. y otra por m, t, &c. será MDM′ la *concoide superior* y mdm la *inferior*: El punto B se llama *polo*, y la GH *directriz*. Cuando AB es mayor que dA, resulta la figura 193: cuando es menor (fig. 194), la curva tiene un nudo en d, y cuando es igual (fig. 195) se desvanece el nudo, y queda un punto de retroceso en B.

Por la referida construccion se ve 1.° que la curva podrá trazarse por la interseccion contínua de una regla BDM (fig. 196) movible al rededor de B, y de un círculo de un radio CA, cuyo centro corra la GH con la regla aplicada á dicho centro. Y si al círculo se sustituye una curva cualquiera CM (fig. 197) que se haga mover lo largo de GH junto con la regla fija en un punto B, y aplicado á otro cualquiera del ege que recorra la GH; resultará otra concoide que variará segun las diferentes curvas que se empleen. 2.° Que la GH (fig. 193) es asíntota de la concoide: pues debiendo ser cada vez mas oblicuas las MQ, se irán acercando los puntos M á la GH sin que puedan juntarse: porque siempre ha de mediar alguna parte de las tM.

Si se baja la PM perpendicular á AH, y hacemos $AD = QM = a$, $AB = b$, $PM = y$ y $AP = x$; se tendrá en los triángulos PQM, BAQ semejantes PQ: PM :: AQ: AB, ó........ $\sqrt{(a^2 - y^2)} : y :: x - \sqrt{(a^2 - y^2)} : b$, y $xy = (b+y)\sqrt{(a^2 - y^2)}$, ecuacion á la concoide que será una curva algébrica. El mismo cálculo da $xy = (b-y)\sqrt{(a^2 - y^2)}$ por la ecuacion à la concoide inferior, y una y otra desembarazada del radical es $y^4 \pm 2by^3 + (b^2 - a^2 + x^2)y^2 \pm 2a^2by = a^2b^2$, ecuacion algébrica de una linea de 4.° órden ó curva de 3°.

Finalmente, si tiradas las MP, AB (fig. 197) perpendiculares á la directriz, se supo-

ne $AP = x$, $PM = y$, $CP = z$, $CQ = a$, $AB = b$; será $PQ(z-a):PM(y)::AQ(x+a-z):AB(b)$, y $z = \frac{xy}{b+y} + a$, valor que sustituido en la ecuacion á la curva CM dará la de la concoide de DM. Si se sustituye por eg. en $y^2 = 2ax - x^2$, la ecuacion al círculo cuyo centro es Q; resulta $xy = (b+y)\surd(a^2-y^2)$, que es la de la concoide ordinaria: y sustituyéndole en $y^2 = px$ ecuacion á la parábola; se tiene $y^3+by^2-apy-abp=px$, que pertenece á la concoide parabólica, que sirvió á Descartes para resolver una ecuacion de 6.° grado.

433 *Cisoide de Diocles.* Si en un círculo cuyo diámetro es Aa (fig. 198), Tt tangente en a, se tiran desde A rectas AF, Af &c. á diferentes puntos de la tangente, y tomando $AN = MF$, $An = mf$ &c. se traza por M, m la curva MAm; se tendrá la *cisoide*. Tirese MI paralela, y MP perpendicular á Aa: hagase $AP = x$, $MP = y$, $Aa = a$: y por ser $AN = MF$: será $AK = Pa = a - x$, y $NK = \surd(ax-x^2)$ (136): y como en los triángulos semejantes AKN, APM, $AK:KN::AP:PM$ ó $a-x:\surd(ax-x^2)::x:y$; será $y = \frac{x\surd(ax-x^2)}{a-x}$ ó $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$ la ecuacion á la cisoide, linea de 3.^er orden, y curva algébrica de 2.°

Luego 1.° á cada abscisa corresponden

dos ordenadas, una positiva y otra negativa: y de consiguiente tendrá la curva dos ramos iguales é infinitos. 2.° Pasará por el orígen A de las abscisas: pues $y=o$ cuando $x=o$. 3.° Si $x=\frac{1}{2}a$, $y=\pm\frac{1}{2}a$; es decir que cada ramo corta la circunferencia del círculo en los puntos C, C′ igualmente distantes de A y a. 4.° Cuando $x=a$, $y^2=\frac{a^3}{o}$, ó y es infinita, y la tangente Tt será asíntota de la curva.

Valiéndose en lugar del círculo de la parábola, hipérbola &c. se hubiera sacado la cisoide parabólica, hiperbólica &c. Los antiguos encontraron por medio de esta curva dos medias proporcionales entre dos líneas dadas.

434 *Cuadratriz de Dinostrátes.* Si una tangente AT (fig. 199) al cuadrante AB se mueve uniforme y paralelamente á sí misma hacia C, al mismo tiempo que el radio AC recorre al rededor de C el arco AB; la interseccion de la tangente y el arco formará la curva AMD que se llama *Cuadratriz*: en la que en virtud de la construccion cualquier espacio AP corrido por la tangente AT, es al arco AN corrido por el radio AC; como el radio es al cuadrante ANB.

Luego si se supone AP$=x$, PM$=y$, AN$=u$, AC$=a$, ANB$=c$; será $x:a::u:c::$ *ángulo* ACN: *ángulo* ACB, ó $u=\frac{cx}{a}$: y como

CP:PM::CA:AT, ó $a-x:y::a:$ *tang.* u; se tendrá $y=\frac{a-x}{a}$ *tang.* $\frac{cx}{a}$ por la ecuacion á la curva, que es de las trascendentes, y de la que se sirvió su inventor para cuadrar el círculo.

435 *Espiral de Arquímedes.* Se llama así la curva CKMA (fig. 200) descrita por un punto C que se mueve uniformemente por el radio CA, mientras que este hace una revolucion al rededor del centro C; de manera que el punto C llegue á A, cuando el radio haya recorrido toda la circunferencia. Si CA alargado repite su revolucion, mientras C continúa su movimiento, describirá una segunda espiral, y podrá trazar otras muchas que serán partes de una curva que se estiende al infinito. De consiguiente, la ordenada CM (y), será al radio CA (a); como el arco AON (x), que es la abscisa correspondiente, á toda la circunferencia AONBHA: esto es, $y=\frac{ax}{c}$; ecuacion á la curva, que tambien es trascendente, y que pasa por el centro del circulo generador y el punto A. Haciendo $x=c+x'$, se mudará la ecuacion en $y=a+\frac{ax'}{c}$, en la que dando á x' los valores comprendidos entre o y c, resultarán los de la segunda espiral, que terminará en el estremo de un radio doble de CA: haciendo $x=2c+x'$, se tendrá la de la tercera, y así de las demas.

436 *Espiral parabólica.* Si en un radio cualquiera CN (fig. 201) se toma una parte MN media proporcional entre el arco AN y una recta dada p; la curva que pase por los puntos M así determinados, se llama *espiral parabólica*. Haciendo en ella $AN=x$, $CM=y$, $AC=a$; se tiene $y=a-\sqrt{px}$, ecuacion á la curva, que espresará sus infinitas revoluciones sustituyendo en ella en lugar de x; $c+x$, $2c+x$ &c.

437 *Espiral hiperbólica.* Si en una recta indefinida CP (fig. 202) se trazan desde un punto cualquiera C como centro los arcos AG, QM, PO &c. iguales en longitud, y se hace pasar una curva por sus estremos G,M,O &c. será la *espiral hiperbolica*, en la que la recta BH paralela al ege CP, y distante de él en $CB=AG=QM=PO$ &c. será su asíntota; pues no puede encontrarla hasta que CM sea infinito.

Sea $CA=a$, $AN=x$, $CM=y$, $AG=QM=$&c. $=b$, tendremos $x:b::a:y$, ó $xy=ab$ ecuacion á la curva, semejante á la de la hipérbola entre las asíntotas; y en la que poniendo por x;$c+x$,$2c+x$ &c. resulta $y=\frac{ab}{c+x}$, $y=\frac{ab}{2c+x}$ &c. Luego al paso que crece la abscisa, mengua la ordenada hasta el infinito, y la curva hace infinidad de revoluciones al rededor de su centro antes de llegar á él.

438 *Logaritmica.* Si de uno y otro lado

de la linea indefinida AY (fig. 172) se toman las partes iguales AE, EF &c. AC, CX, XO, y en los puntos O,X C,A se levantan perpendiculares OL, XM', CN, AB &c. que representen los números de una progresion geométrica; las partes AE, AF, AG &c. estarán en progresion aritmética, y cualquiera de ellas AP será el término aritmético que corresponde al geométrico PM, ó AP será el logaritmo de PM (227 *t.* I). Hágase ahora pasar una curva por todos los puntos L, M, N, &c. y se tendrá la *logarítmica*, en la que los valores de las ordenadas están en progresion geométrica, y los de las abscisas en progresion aritmética.

Si suponiendo $AB = 1$, hacemos $AP = x$, $PM = y$, m el módulo, y $e = 2{,}7182818 3$, número cuyo logaritmo hiperbólico es 1; tendremos $x = mly = xle$, (454 y 458) ó $y^m = e^x$ de donde se saca $y = e^{\frac{x}{m}}$, ecuacion á la logarítmica, curva trascendente, en la que cuando $x = o$, y ó $AB = 1$. Si suponemos $AE = 1$, será ED ó $y = e^{\frac{1}{m}}$: luego si llamamos ED, a; tendremos siempre $y = a^x$: y las abscisas formarán la progresion aritmética ÷ 1.2.3.4. &c. mientras que las ordenadas forman la geométrica ∺ $a^1 : a^2 : a^3 : a^4$: &c. Las abscisas negativas AC, AX &c. que son -1, -2 &c. dan las ordena-

das $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$ &c. es decir, que la curva tiene una rama infinita BL que se va acercando á la directriz ó ege OY hasta al infinito, ó que OY será asíntota de la curva. La principal propiedad de la logarítmica es que su subtangente es una cuantidad constante como probaremos adelante.

439 *Espiral logarítmica.* Si despues de haber determinado un número cualquiera de arcos AD,AG,AH, &c. (fig. 203) que estén en progresion aritmética, se determinan en los radios correspondientes lineas CA, CM, CN &c. en progresion geométrica, la curva que pasa por los puntos A,M,N, &c. se llama *logarítmica espiral*, la cual forma un mismo ángulo con todos los radios CM tirados desde el centro, igualmente que estos con la tangente; y en la que los arcos circulares son logarítmos de las ordenadas correspondientes de las curvas. Dichas ordenadas CO, CN &c. disminuyen en progresion geométrica decreciente al infinito, y de consiguiente la curva hace infinitas revoluciones al rededor del centro C, sin jamas llegar á él.

440 *Cicloide.* Si un círculo AG (fig. 204) rueda sobre una recta Aa hasta que el punto A llegue á a; trazará este punto la nueva curva ABa que se llama *cicloide* ó *trocoide*, cual la describe el clavo de una rueda á cada revolucion. Si ademas del de rotacion, hubie-

se movimiento de traslacion hacia una misma parte, resulta una cicloide menguada (fig. 205), y si la traslacion fuese en sentido contrario á la rotacion, será la cicloide alongada (fig. 206).

Por la descripcion de la curva se ve que en la ordinaria la base Aa es igual á la circunferencia del circulo generador, menor en la menguada, y mayor en la alongada. El diámetro BC es el ege de la curva cuando es perpendicular á la base, y el punto B su vértice.

Tirada MP perpendicular a BC (fig. 204), y las cuerdas iguales MF, OC; sera $FC = MO$: y pues que $FC = AC - AF = BOC - FKM = BOC - OLC = BIO$; es claro que la parte MO de la ordenada MP es siempre igual al arco correspondiente BIO del circulo generador: y como la parte restante OP es seno de dicho arco: si llamamos MP, y; BIO, u; sera la ecuacion a la cicloide ordinaria $y = u + sen\ u$: y suponiendo $MO = \frac{a}{b} BIO$ que comprende las tres cicloides, segun que b es igual, mayor ó menor que a; se tendrá $y = \frac{b}{a} u + sen\ u$ por la ecuacion general á las tres, que como se ve, son curvas trascendentes. Cuando el punto A se toma dentro ó fuera del círculo, describe otra especie de cicloide: y si en vez de linea recta, se hace rodar el círculo sobre otra curva; resultan otras del género de las *epicicloides*.

441 Finalmente, se llaman curvas *esponenciales* aquellas en cuya ecuacion entra algun esponente variable, como $ay=x^x$, el producto de la ordenada y por la constante a, que se puede suponer igual á 1, sería proporcional á la abscisa x elevada á la potencia x. Suponiendo $a=1$, y $x=2$, sería $y=x^2=4$: si $x=3$, $y=3^3=27$ &c. es decir, que si á la ordenada y corresponde la abscisa 2, y á la ordenada y' la abscisa $x=3$; se tendrá $y:y'::4:27$: y las y aumentarán ó disminuirán en la misma relacion que las x^x correspondientes.

Es muy frecuente y universal el uso que en las ciencias y las artes se hace de las curvas, en especial de las secciones cónicas. Sus propiedades sirven en la proyeccion de las bombas, escavacion de minas, en la construccion de las bóvedas, de las bocinas acústicas, espejos ustorios, telescopios &c. Los planetas se mueven en elipses cuyo focus ocupa el sol: y las orbitas de los cometas se confunden sensiblemente con parábolas en los puntos de sus trayectorias en que se observan. La cicloide ha servido para arreglar los reloxes de péndola &c.

CAPITULO V

CÁLCULO INFINITESIMAL

442 El objeto de este cálculo es considerar la relacion entre los incrementos ó decrementos que sobrevienen á cualesquiera cuantidades variables, para llegar á cierto estado: dichos aumentos ó decrementos que son partes infinitamente pequeñas ó *elementos* de las cuantidades; pueden mirarse bajo de dos aspectos diferentes, que dividen en dos ramos el cálculo infinitesimal. En el uno que se llama *cálculo diferencial* ó *de las fluxiones*, se averigua la razon que hay entre dichos elementos dadas las cuantidades, y en el otro que es el *integral* ó de las *fluentes*, se busca la razon de las cuantidades dados sus elementos; de suerte que el 1.° resuelve las cuantidades en sus elementos, y el 2.° de los elementos compone las cuantidades.

Si q es el cociente de la cuantidad b partida por a, de suerte que $\frac{b}{a}=q$, y permaneciendo b constante, concebimos que a vaya menguando; irá creciendo á proporcion el cociente q hasta que llegando á ser a una cuantidad infinitamente chica cual podemos imaginar al cero, venga q á ser infinitamente grande: esto es, si $a=o$, $\frac{b}{a}=\frac{b}{o}=q=\infty$, (es-

te es el signo del infinito). Al contrario, si se concibe que a vaya creciendo hasta el infinito, disminuirá q hasta llegar á ser cero, y será $\frac{b}{a}=\frac{b}{\infty}=q=0$. Por esto llamaremos cuantidad *infinita* la que *en su género* se concibe haber recibido todos los aumentos posibles: é *infinitamente pequeña* la que se concibe menor *en su género* que otra cualquiera posible. Pero propiamente hablando, el infinito matemático equivale las mas veces á *indefinido*, y viene á ser el limite ácia el que se acerca el finito cuanto se quiere, sin poder jamas llegar á él. Cuando decimos que 1 es la suma de la serie infinita $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ &c. es decir que 1 es el límite de dicha suma; porque cuantos mas términos se sumen de dicha serie, mas se acercará la suma á 1. Asímismo, llamar al círculo *polígono de infinitos lados*, es decir que el círculo es el límite de cuantos polígonos se le quieran inscribir ó circunscribir, al cual se acercarán tanto cuanto mas lados tenga.

443 Hay infinitos é infinitamente pequeños de diferentes órdenes: si x es infinito, siendo $1:x::x:xx$; será xx infinito respecto de x, como x lo es respecto de 1, ó será infinitamente infinito ó infinito de 2.º órden: por igual razon es x^3 infinito de 3.r órden, x^4 de 4.º &c. Si $\frac{1}{x}$ es infinitamente pequeño, será $\frac{1}{xx}$ infinitamente pequeño de 2.º órden;

pues es $1 : \frac{1}{x} :: \frac{1}{x} : \frac{1}{xx}$; y $\frac{1}{x^3}$ será infinitamente pequeño de 3.^r órden, $\frac{1}{x^4}$ de 4.° &c. En un producto de factores infinitos ó infinitamente pequeños, se atiende al número y grado de dichos factores: y así bxz y xz, siendo x, z infinitos y b finito, son infinitos de 2.° órden; pues $bxz : xz :: b : 1$; y siendo b, 1 de un mismo órden, lo serán tambien bxz y xz. Aquí se ve tambien que á los infinitos multiplicados y partidos por cuantidades finitas puede medirlos alguna razon finita.

444 Las cuantidades finitas no aumentan ni disminuyen una cuantidad infinita: porque siendo $1-1=-1+1=0$, y $\frac{a}{0}=\infty$ (440); será $\frac{a}{1-1}=\frac{a}{-1+1}=\infty$: hagase la division (119 t. I), y resultará $\frac{a}{1-1}=a+a+a+a.....+\frac{a}{1-1}$: y $\frac{a}{-1+1}=-a-a-a-a.....+\frac{a}{-1+1}$: luego lo mismo es $\frac{a}{1-1}$ que $a+a+a+a...+\frac{a}{1-1}$, y lo mismo es $\frac{a}{1+1}$ que $-a-a-a-a...+\frac{a}{-1+1}$.

De consiguiente en los cálculos en que intervengan una ó mas cuantidades infinitas, se deben despreciar todos los términos finitos: y por igual razon se deben omitir los infinitos

que le anteceden en la serie precedente: en los triángulares por eg, $1=1$, $3=1+2$, $6=1+2+3$ &c.

El 3.r género es el de los números *polígonos* formados por la suma de los términos consecutivos de una progresion aritmética, y toman el nombre segun es 1, 2, 3 &c. la diferencia de la progresion......................................

Progresiones aritméticas		*Números polígonos*	
1.2.3.4. 5. &c.	*dif.* 1..	1.3.6.10.15. &c.	*Triang.*
1.3.5.7. 9. &c.	*dif.* 2..	1.4.9.16.25. &c.	*Cuadr.*
1.4.7.10.13.&c.	*dif.* 3..	1.5.12.22.35. &c.	*Pentag.*
1.5.9.13.17.&c.	*dif.* 4..	1.6.15.28.45. &c.	*Exágon.*

Se llaman *polígonos* porque las unidades que tienen sus números, se pueden colocar en figura de triángulo, cuadrado, pentágono &c.

447 Ya hemos visto cómo por medio de la division y de la fórmula de Newton (119 y 177 *t.* I.) se reduce á serie cualquier cuantidad: ahora vamos á esplicar otro método mas espedito valiéndonos de los coeficientes indeterminados A, B, C, D &c. Supongamos pues para reducir á serie la cuántidad $\frac{a}{b+z}$ que el valor de dichos coeficientes sea tal que..... $\frac{a}{b+z}=A+Bz+Czz+Dz^3+Ez^4+$&c. tendremos multiplicando ambos miembros por $b+z$,

$$a=\begin{cases} bA+bBz+bCzz+bDz^3+\&c. \\ \quad +Az+Bzz+Cz^3+\&c. \end{cases}$$

ó trasponiendo el a, $o = \begin{cases} bA + bBz + bCzz + bDz^3 + \&c. \\ -a + Az + Bzz + Cz^3 + \&c. \end{cases}$

Para que el 2.º miembro se reduzca á cero, igualemos á cero todos los coeficientes, y tendremos $bA - a = o$, $bB + A = o$, $bC + B = o$, $bD + C = o$: de donde sacarémos despejando A, B, C, &c. $A = \frac{a}{b}$, $B = -\frac{A}{b} = -\frac{a}{bb}$; $C = -\frac{B}{b} = \frac{a}{b^2}$; $D = -\frac{C}{b} = -\frac{a}{b^4}$ &c.: luego $\frac{a}{b+z} = A + Bz + Czz + Dz^3 + \&c. = \frac{a}{b} - \frac{az}{bb} + \frac{azz}{b^3} - \frac{az^3}{b^4} + \&c.$

Para reducir á serie $\frac{aa}{aa + 2ax - xx}$; supongo $\frac{aa}{aa + 2ax - xx} = A + Bx + Cxx + Dx^3 + \&c.$ y multiplicando por el denominador, saldrá $aa = \begin{cases} aaA + aaBx + aaCxx + aaDx^3 + \&c. \\ \quad + 2aAx + 2aBxx + 2aCx^3 + \&c. \\ \quad\quad - Axx - Bx^3 \&c. \end{cases}$

Y por ser entonces $aa = aaA$, $aaB + 2aA = c$, $aaC + 2aB - A = o$, $aaD + 2aC - B = o$; será $A = 1$, $B = -\frac{2}{a}$, $C = \frac{5}{aa}$, $D = -\frac{12}{a^3}$ &c. y de consiguiente $\frac{aa}{aa + 2ax - xx} = A + Bx + Cxx + Dx^3 + \&c. = 1 - \frac{2x}{a} + \frac{5xx}{aa} - \frac{12x^3}{a^3} + \&c.$

Cuando en el numerador hay dos términos, se igualan á los dos homogeneos de la

série multiplicada ya por el denominador: si hay tres á los tres primeros, y así de los demas. Para hallar la série que corresponde á $\frac{1+2z}{1-z-zz}$, se supondrá igual á $A+Bz+Czz+Dz^3+$ &c. y despues de haber multiplicado por $1-z-zz$; se hará $1=A$, $2=B-A$: y,

$$1+2z=\begin{cases} A+Bz+Czz+Dz^3+\text{ \&c.} \\ \quad -Az-Bzz-Cz^3-\text{ \&c.} \\ \qquad -Azz-Bz^3-\text{\&c.} \end{cases}$$

de consiguiente será $=B=3$, $C=4$, $D=7$, &c. y $\frac{1+2z}{1-z-zz}=A+Bz+Czz+Dz^3+$&c. $=1+3z+4zz+7z^3$ &c. série *recurrente*, por ser el coeficiente de cada término suma de los dos precedentes.

Para sacar por este medio la raiz próxima de $(aa+xx)$, ó reducir á série $\sqrt{(aa+xx)}=(aa+xx)^{\frac{1}{2}}$, supondremos $(aa+xx)^{\frac{1}{2}}=A+Bxx+Cx^4+Dx^6+$&c. (no se supone igual á $A+Bx+Cxx+$&c. porque el término con x del 2.º miembro sin homólogo en el 1.º, hubiera embarazado la operacion). Cuádrese pues, la anterior ecuacion, y resultará...................

$$aa+xx=\begin{cases} AA+2ABxx+BBx^4+2ADx^6+\text{\&c} \\ +2ACx^4+2BCx^6+\text{\&c.} \end{cases}$$

de donde se saca $aa=AA$ y $A=a$, $B=\frac{1}{2a}$ $C=-\frac{1}{8a^3}$, $D=\frac{1}{16a^5}$ &c. Luego $\sqrt{(aa+xx)}=$

$A + Bxx + Cx^4 + Dx^6 + \&c. = a + \frac{xx}{2a} + \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} + \&c.$

448 *El sumar las series* es la operacion mas dificil que se hace con ellas, y viene á reducirse á sumar algunas generales que sirven de fórmulas, por las que se suman las demas que pueden reducirse á ellas. Nosotros nos ceñirémos á los casos mas precisos

1.º Sea $\div \frac{a}{b} : \frac{a}{bq} : \frac{a}{bqq} : \frac{a}{bq^3} : \frac{a}{bq^4} \ldots\ldots \frac{a}{bq^\infty}$ una progresion general geométrica decrecente al infinito. Si se coloca así $\div \frac{a}{bq^\infty} \ldots \frac{a}{bq^4} : \frac{a}{bq^3} : \frac{a}{bqq} : \frac{a}{bq} : \frac{a}{b}$; la habremos hecho crescente, y su suma será (223 *t.* I) despreciando el término $\frac{a}{bq^\infty}$ que es infinitamente pequeño (442), $S = \frac{aq}{bq - b}$: fórmula por la que se podrá sumar cualquiera progresion geométrica decrescente al infinito.

Sumemos por ella la fraccion decimal 0,3333 &c. que sabemos equivale á $\frac{1}{3}$, y viene á ser $\div \frac{3}{10} : \frac{3}{100} : \frac{3}{1000} \ldots \frac{3}{10^\infty}$: si la hacemos crescente escribiendola así, $\frac{3}{10^\infty} : \ldots \frac{3}{1000} : \frac{3}{100} : \frac{3}{10}$; será $a = 3$, $b = 10$, $q = 10$, y $S = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$. De

consiguiente la suma de 0,99999 &c. será 1 como lo da tambien la fórmula.

Para averiguar en quebrado comun el valor de la decimal 0,181818 &c. ó la suma de la progresion á que equivale; harémos $a=18$, $b=100$, $q=100$, y será $S=\frac{1800}{9900}=\frac{2}{11}$. Tambien encontrarémos que la fraccion periódica 0,14285714285714 &c. vale $\frac{1}{7}$; sustituyendo en la fórmula, 142857 en lugar de a, 1000000 en lugar de b y q.

449 2.º Para sumar una serie $\frac{a}{b}$, $\frac{a+d}{bq}$, $\frac{a+2d}{bq^2}$, $\frac{a+3d}{bq^3}$ &c. cuyos numeradores están en progresion aritmética y los denominadores en progresion geométrica; se reducirá á esta forma $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{bq}+\frac{d}{bq}$, $\frac{a}{bqq}+\frac{d}{bqq}+\frac{d}{bqq}$, $\frac{a}{bq^3}+\frac{d}{bq^3}+\frac{d}{bq^3}+\frac{d}{bq^3}$ &c. de donde se sacarán las siguientes séries que son otras tantas progresiones geométricas.

$\div \frac{a}{b} : \frac{a}{bq} : \frac{a}{bqq} : \frac{a}{bq^3}$ &c. cuya suma es $\frac{aq}{bq-b}$;

$\div \frac{d}{bq} : \frac{d}{bqq} : \frac{d}{bq^3}$ &c. su suma...... $\frac{d}{bq-b}$

$\div \frac{d}{bqq} : \frac{d}{bq^3}$ &c. su suma................. $\frac{d}{bqq-bq}$

$\div \frac{d}{bq^3}$ &c. su suma... $\frac{d}{bq^3-bqq}$

Y pues qué estas sumas escepto la primera,

forman la progresion $\div \frac{d}{bq-b} : \frac{d}{bqq-bq} : - \frac{d}{q^3-bqq}$ &c. cuya suma es $\frac{dq}{bq^2-2bq+b}$: si á esta se añade la primera $\frac{aq}{bq-b}$; se tendrá............... $\frac{aqq-aq+dq}{bqq-2bq+b}$ por la suma de la série propuesta.

450 3.° Encontremos generalmente la suma de cualquier número de términos de una progresion cualquiera de las potencias de los números naturales 1, 2, 3, 4 &c. Represente la progresion aritmética $\div a.b.c.d.t.$ una serie cualquiera de estos números: y pues que $t=d+1$, $d=c+1$, $c=b+1$, $b=a+1$; será elevando estas ecuaciones á una potencia cualquiera m......

1.° $t^m = d^m + md^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} d^{m-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{m(m-1)(m-2)}{2\times3} d^{m-3} +$ &c.

2.° $d^m = c^m + mc^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} c^{m-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{m(m-1)(m-2)}{2\times3} c^{m-3} +$ &c.

3.° $c^m = b^m + mb^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} b^{m-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{m(m-1)(m-2)}{2\times3} b^{m-3} +$ &c.

4.° $b^m = a^m + a^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} a^{m-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{m(m-1)(m-2)}{2\times3}a^{m-3}+$&c.

Sumo todas estas potencias y tendré reduciendo, $t^m=a^m+m(a^{m-1}+c^{m-1}+b^{m-1}+d^{m-1})+\frac{1}{2}(m\times m-1)(d^{m-2}+c^{m-2}+b^{m-2}+a^{m-2})+\frac{m(m-1)(m-2)}{2\times3}(d^{m-3}+c^{m-3}+b^{m-3}+a^{m-3})+$&c. Si suponemos ahora s^{m-1} igual á la suma de las potencias $m-1$, de a, b, c, d, t; será $s^{m-1}-t^{m-1}=a^{m-1}+b^{m-1}+c^{m-1}+d^{m-1}$, y $s^{m-2}-t^{m-2}=a^{m-2}+b^{m-2}+c^{m-2}+d^{m-2}$ &c. y la suma anterior se reducirá finalmente á $t^m=a^m+\ldots\ldots m(s^{m-1}-t^{m-1})+\frac{1}{2}(m\times m-1)(s^{m-2}-t^{m-2})+\frac{m(m-1)(m-2)}{2\times3}(s^{m-3}-t^{m-3})+$&c. espresion general que se busca.

Siendo $m=1$, resulta $t=a+s^0-t^0$ ó $s^0=t-a+1$, suma de una série de potencias *cero*: en ÷ 3.° 4.° 5.° 6.° por eg. $s^0=t-a+1=6-3+1=4$. Si $m=2$ se reduce la formula á $t^2=aa+2s-2t+s^0-t^0=aa+2s-t-a$, poniendo en lugar de s^0-t^0, $t-a$ sacado de la suposicion anterior: luego $s=\frac{1}{2}(tt-aa+t+a)=\frac{1}{2}t(t+1)+\frac{1}{2}a(1-a)$: de suerte que la suma de ÷ 8. 9. 10. 11. 12. 13 es $s=13\times7+4\times-7=63$.

Suponiendo $m=3$, resulta $t^3=a^3+3(ss-tt)+3(s-t)+s^0-t^0=a^3+3ss-3tt+3s-2t-a$: sustituyase el valor de s, y se tendrá trasponiendo, $ss=\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}tt+\frac{1}{6}t-\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{2}aa-\frac{1}{6}a=\frac{1}{6}t(2tt+3t+1)-\frac{1}{6}a(2aa-3a+1)$.

En la série de los cuadrados $\div 2.^2 3.^2 4.^2 5.^2 6.^2$ se tiene $s=90$. Haciendo $m=4$, y poniendo en el resultado los valores hallados de s, ss, sale $s^2 = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{4}tt - \frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}tt(tt+2t+1) - \frac{1}{4}aa(aa-2a+1)$: y así de las demas.

451 Si suponemos infinito el número de términos, será el último $t=\infty$, y entonces. ∞^{m-1}, ∞^{m-2} &c. se desvanecerán en la formula como infinitamente pequeños respecto de ∞^m: y lo mismo s^{m-2}, s^{m-3} &c. respecto de s^{m-1}: luego dicha fórmula quedará reducida á $\infty^m = ms^{m-1}$, y $s^{m-1} = \frac{\infty^m}{m}$, ó suponiendo $m-1=n$, $s^n = \frac{\infty^{n+1}}{n+1}$: es decir, la suma de las potencias n de una infinidad de terminos de los números naturales es el producto de la potencia ∞^m del último termino multiplicado por el número de términos, y partido por $n+1$. Con la misma facilidad se sacaría la suma de las potencias de cualquier número de terminos finito ó infinito de una progresion aritmética cualquiera, suponiendo r la diferencia y haciendo $t=d+r$, $d=c+r$&c. y como el esponente n puede representar aun las potencias fraccionarias, quedará el problema completamente resuelto.

452 Se llama *término general de una série* la espresion de n numero de términos, por la que se forman todos los de la serie susti-

tuyendo por n los números 1, 2, 3 &c.: n^2 pr eg., es el término general de la série 1, 4, 9, 16, 25 &c. cuyos términos resultan suponiendo $n=1$, $n=2$ &c. y *suma general de una serie* la espresion que da generalmente la suma de un número cualquiera n de términos. Tal es $\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}nn+\frac{1}{6}n$ suma de la série de los cuadrados 1, 4, 9, 16 &c. cuyo término general es nn: en la cual si en lugar de n se pone 6, salen 91 que suman los seis primeros términos.

453 Si en la suma general (S) se pone $n-1$ en lugar de n, resultará la suma (s) de los términos hasta $n-1$ inclusive, ó de todos ménos el último que es el general: de consiguiente si esta suma se resta de la primera, se tendrá el término general (T), que es siempre $S-s$. Si $S=\frac{1}{2}(nn+n)$, será poniendo $n-1$ en lugar de n, $s=\frac{1}{2}(nn-n)$, y $S-s=T=n$. Si $S=\frac{aq^n-a}{q-1}$, será $S-s=T=aq^n-1$. Pero dado el término general T no es tan facil encontrar la suma. Contentémonos con la resolucion siguiente que se estiende á inumerables casos.

454 Sea $T=an^m+bn^{m-1}+cn^{m-2}+\&c.+r$, y hayase de encontrar la suma S de su série. Si hacemos $S=An^{m+1}+Bn^m+Cn^{m-1}+Dn^{m-2}+\&c.+R$, y sustituimos $n-1$ en lugar de n, tendremos $s=A(n-1)^{m+1}+B(n-1)^m+C(n-1)^{m-1}+D(n-1)^{m-2}+\&c.=\ldots\ldots$

$$An^{m+1} - A(m+1)n^m + \tfrac{1}{2}Am(m+1)n^{m-1} \ldots\ldots$$
$$- \frac{A(m+1)m(m-1)}{2\times 3} n^{m-2} + \&c.$$
$$+ Bn^m - Bm\times n^{m-1} + \tfrac{1}{2}Bm(m-1)n^{m-2} - \&c.$$
$$+ Cn^{m-1} \quad - C(m-1)n^{m-2} + \&c.$$
$$+ Dn^{m-2} - \&c.$$

luego $S - s = T = an^m + bn^{m-1} + cn^{m-2} + dn^{m-3} + \&c. = A(m+1)n^m - \tfrac{1}{2}A(m+1)ma^{m-1} + \frac{A(m+1)m(m-1)}{2\times 3} n^{m-2} - \&c.$

$$+ B\times m\times n^{m-1} \quad - \tfrac{1}{2}B(m-1)mn^{m-2} + \&c.$$
$$+ C(m-1)n^{m-2} \;\&c.$$

Compárense los términos homólogos, y se tendrá $A = \frac{a}{m+1}$, $B = \frac{a}{2} + \frac{b}{m}$, $C = \frac{c}{m-1} + \frac{b}{2} + \frac{am}{12} - \&c$: de consiguiente $S = An^{m+1} + Bn^m + \&c. = \frac{a}{m+1} n^{m+1} + \left(\frac{b}{m} + \frac{a}{2}\right) n^m + \left(\frac{c}{m-1} + \frac{b}{2} + \frac{am}{12}\right) n^{m-1} + \&c.$

Si se pidiese la suma de la série 1.2.3.4.5.....n, cuyo término general es n; se hará $m = 1$, $a = 1$, $b = o$, $c = o$ &c. y será $S = \tfrac{1}{2}n + \tfrac{1}{2}nn = \tfrac{1}{2}(nn + n)$. La de la série 1.4.9.16.... nn, donde $T = nn$, da $m = 2$, $a = 1$, $b = o$, $c = o$ &c. y $S = \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}nn + \tfrac{1}{6}n$. Ultimamente, si $T = n^m$ como sucede en la fórmula $1^m.2^m.3^m.4^m \ldots\ldots n^m$; será $m = m$, $a = 1$, $b = o$, $c = o$ &c. y $S = \frac{1}{n+2} n^{m+1} + \tfrac{1}{2} n^m + \frac{m}{12}$

$n^{m-1}+$ &c. y suponiendo $n=\infty$ y positivo, será despreciando n^m, n^{m-1} &c. (442), $S=\frac{n^{m+1}}{m+1}$

455 Cuando se da una ecuacion $x=az^m+bz^{m+n}+cz^{m+2n}+dz^{m+3n}+$ &c. y se pide espresar en términos de x el valor de z; acudimos al que se llama *método inverso*, *rétorno ó regreso de las séries*. Consideremos 1.° que $m=1$, y $n=1$, ó que sea $x=az+bzz+cz^3+dz^4+$ &c. y que se pida en x el valor de z. Si suponemos $z=Ax+Bxx+Cx^3+Dx^4+$&c. será..............

$$\begin{aligned} zz &= AAxx+2ABx^3+BBx^4+\&c. \\ &\qquad\qquad\;\; +2ACx^4+\&c. \\ z^3 &= \quad A^3x^3+3AABx^4+\&c. \\ z^4 &= \qquad\qquad\quad A^4x^4+\&c. \end{aligned}$$

$$y\ x=\begin{cases} az=Aax+aBxx+aCx^3+aDx^4+\&c. \\ bzz=AAbxx+2ABbx^3+B^2bx^4\&c. \\ \qquad\qquad +2ACbx^4+\&c. \\ cz^3= \quad A^3cx^3+3AABcx^4+\&c. \\ dz^4= \qquad\qquad A^4dx^4+\&c. \end{cases}$$

luego $x=Aax$, y $A=\frac{1}{a}$: $aB+AAb=o$, ó $B=-\frac{b}{a^3}$: $aC+2aBb+A^3c=o$, y $C=\frac{2bb-ac}{a^5}$, y así de los demas. Pónganse estos va-

lores en $z = Ax + Bxx + Cx^3 + Dx^4$ &c. y resultará $z = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a^3}xx + \frac{2bb - ac}{a^5}x^3 + \left(\frac{5abc - aad + 5b^3}{a^7}\right)x^4 + \left(\frac{14b^4 - 21abbc + 6aabd + 3aacc - a^3e}{a^9}\right)x^5 \ldots\ldots + \&c$ fórmula por la que podremos espresar una série de potencias de z en otra compuesta de las mismas potencias de x.

Sea por eg., $x = z - zz + z^3 - z^4 + z^5 + \&c.$ tendremos $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$, $d = -1$, $e = 1$ &c. y sustituyendo estos valores, será $z = x + xx + x^3 + x^4 + x^5 + \&c.$ Si fuese $x = z + \frac{1}{2}zz + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{5}z^5 +$ &c. por ser $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{3}$, $d = \frac{1}{4}$, $e = \frac{1}{5}$ &c. será $z = x - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 -$ &c. Últimamente, siendo $z = \frac{x}{a} - \frac{xx}{2aa} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \frac{x^5}{5a^5} - \&c.$ será $\frac{x}{a} = z + \frac{1}{2}zz + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 + \&c.$

Supongamos 2.° que $m = 1$, y $n = 2$, de que resulta la série $x = az + bz^3 + cz^5 + dz^7 + \&c.$ de potencias impares: buscaremos una formula para este caso, haciendo $z = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + \&c.$ pues será.....

$$z^3 = A^3x^3 + 3AABx^5 + 3AACx^7 + \&c. + 3ABBx^7 + \&c.$$
$$z^5 = A^5x^5 + 5A^4Bx^7 + \&c.$$
$$z^7 = A^7x^7 + \&c.$$

luego $x = \begin{cases} az = Aax + aBx^3 + aCx^5 + aDx^7 + \&c. \\ bz^3 = A^3bx^3 + 3AABbx^5 + 3AACbx^7 + 3ABBbx^7 + \&c. \\ \end{cases}$

$$\begin{cases} cz^5 = & A^5cx^5+5A^4Bcx^7+\&c. \\ dz^7 = & A^7dx^7+\&c. \end{cases}$$

De donde se sacará $x = aAx$, ó $A = \frac{1}{a}$: $aB+A^3b=0$ y $B = -\frac{b}{a^4}$: $C = \frac{3bb-ac}{a^7}$, $D = \frac{8abc-aad-12b^3}{a^{10}}$ — &c. de modo que la fórmula por la que podremos espresar en x cualesquiera potencias impares de z, será $z = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a^4}x^3 + (\frac{3bb-ac}{a^7})x^5 + (\frac{8abc-aad-12b^3}{a^{10}})x^7 + \&c.$ Para espresar en x los valores de z en la ecuacion $x = z. - \frac{z^3}{2.3.tt} + \frac{z^5}{2.3.4.5.t^4} - \frac{z^7}{2.3.4.5.6.7.t^6} + \&c.$ haremos $a = 1$, $b = -\frac{1}{2.3.tt}$, $c = \frac{1}{2.3.4.5.t^4}$, $d = \frac{1}{2.3.4.5.6.7t^6}$ &c. y se tendrá $z = x + \frac{1}{2.3.tt}x^3 + (\frac{1}{3.4t^4} - \frac{1}{2.3.4.5t^4})x^5 + \&c. = x + \frac{1}{2.3tt}x^3 + \frac{3}{2.4.5t^4}x^5 + \frac{3.5}{2.4.6.7t^6}x^7 + \&.$

ARTICULO II

Consideraciones generales sobre los Logarítmos, algunos de sus usos, y modo de sacarlos por las séries.

456 Para generalizar mas las ideas que dimos (227 *t.* I) de los logarítmos, supongamos que sea a un número mayor que 1, x la potencia á que se ha de elevar para que iguale á b, de modo que $a^x=b$; será el esponente x el logarítmo de b, ó $x=lb$ (l significa *logarítmo.*) La cuantidad a se llama base, y segun varíe su valor, varía el sistema de logarítmos. Juan Népero su inventor usó del mas sencillo en que $a=1$, del que resultan los logarítmos hiperbólicos (417): este y el de las tablas, en el que se hizo $a=10$, son los usados: pero en todos es $l1=0$: pues si en $a^x=b$, suponemos $b=1$; será $a^x=1$, y de consiguiente $x=0$ (116 *t.* I): y pues que $la^1=1$, $la^2=2$, $la^3=3$ &c. conoceremos el número que se ha tomado por base, viendo cuál es el que tiene por logarítmo 1.

457 En cualquier sistema de logarítmos, se tiene $lab=l\frac{ab}{1}=la+lb-l1$; por ser $1:a::b:\frac{ab}{1}$, y por lo que enseñamos (230 *t.* I): $labc=la+lb+lc-2l1$; porque $1:\frac{ab}{1}::c:\frac{abc}{1}$:

$labcd = la + lb + lc + ld - 3l1$; $la^2 = la + la - l1 = 2la - l1$: $la^3 = 3la - 2l1$, y $la^m = mla - (m-1)\,l1$: $l\sqrt[m]{a} = la^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}la - (\frac{1}{m} - 1)l1 = \frac{la + (m-1)l1}{m}$: $l\sqrt[3]{a} = \frac{1}{3}(la + 2l1)$. En el quebrado $\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \times 1$, donde $b{:}a{::}1{:}\frac{a}{b}$, se tendrá $l\frac{a}{b} = l1 + la - lb$; $l\frac{b^3}{ac} = l1 + lb^3 - lac = 3lb - la - lc$, poniendo $3lb - 2l1$ en lugar de lb^3, $la + lc - l1$ por lac, y reduciendo despues.

458 En el sistema comun de los logarítmos de las tablas, en el que $l1 = 0$, son mas sencillas estas espresiones por reducirse á cero los términos en que entra $l1$: y así $lab = la + lb$: $la^3 = 3la$, $la^m = mla$; $l\frac{a}{b} = la - lb$: $l\frac{a^3}{b^2c} = 3la - 2lb - lc$: $l\sqrt[n]{c^2} = lc^{\frac{2}{n}} = \frac{2}{n}lc$: $l\sqrt{\frac{(aa-xx)}{(a+x)^2}} = \ldots\ldots$ $\frac{1}{2}l(a-x) - \frac{1}{2}l(a+x)$: y últimamente $l3aa + 1a^4 + 5l3 = 6l3a = l3a^6$. Y para manifestar cuánto facilitan estas espresiones los cálculos mas complicados, vamos á aplicarlas á algunas ecuaciones y problemas.

459 1.° Si se diese para resolver la ecuacion $a^x = b$; haríamos $xla = lb$, y $x = \frac{lb}{la}$: en $\frac{a^{mx}}{b^{nx}} - 1 = c$ será $mxla + (1-nx)lb = lc$, $mxla -$

$nxlb = lc - lb$, y $x = \frac{lc-lb}{mla-nlb} = \frac{l\frac{c}{b}}{l\frac{a^m}{b^m}}$: Sea....

$a^x = \frac{b^{mx+n}}{c^{qx}}$, tendremos $xla = mxlb + nlb - qxlc$, y $x = \frac{nlb}{la - mlb + qlc}$. Ultimamente, si se diese $\frac{b^{n-\frac{a}{x}}}{c^{mx}} = f^{x-p}$, sería $nlb - \frac{a}{x}lb - mxlc = xlf - plf$, y $(mlc+lf)xx - (nlb+plf)x = -alb$, ó $xxlc^m f - xlb^n f^p = -xlb^a$: de donde se saca (260 *t.* I) $x = \frac{lb^n f^p}{alc^m f} \pm \sqrt{\left(\frac{(lb^n f^p)^2}{4(lc^m f)^2} - \frac{lb^a}{lc^m f}\right)}$.

2.° *Si* 100000 *personas aumentan en una provincia de* $\frac{1}{30}$ *cada año ¿cuántas habrá al cabo de un sigló?* Si $100000 = n$, habrá al fin del 1.^r^ año $n + \frac{1}{30}n$ ó $n(1+\frac{1}{30}) = n(\frac{31}{30})$: al fin del 2.° año habrá $n(\frac{31}{30})^2$, al fin del 3.° $n(\frac{31}{30})^3$....... y al fin del siglo $n(\frac{31}{30})^{100}$. Luego deberá ser $(\frac{31}{30})^{100} \times 100000 = x$, el número de habitantes: tendré pues, $100l\frac{31}{30} + l100000 = lx$: y como $l\frac{31}{30} = l31 - l30 = 0.014240439$; será $100l\frac{31}{30} = 1,4240439$: súmese con $l100000 = 5,0000000$, y compondrá $6,4240439 = lx$ que corresponde al número 265487+, valor de x, y número de habitantes que se busca.

Para averiguar en que razon debió au-

mentarse el género humano cada año por los tres hijos de Noe y sus mugeres, para que á los 200 años hubiese un millon de personas; supongo que cada año se aumentasen de .... $\frac{1}{x}$; sería $\left(\frac{1+x}{x}\right)^{200}\times 6$ el número de personas que debería haber á los 200 años, y de consiguiente $\left(\frac{1+x}{x}\right)^{200}\times 6=1000000$, $\frac{1+x}{x}=\left(\frac{1000000}{6}\right)^{\frac{1}{200}}$, y por los logarítmos...$l\frac{1+x}{x}=\frac{1}{200}l\frac{1000000}{6}=\frac{1}{200}\times 5{,}2218487=0{,}0261092$. El número que corresponde á este logaritmo es $\frac{1061963}{1000000}$; luego $\frac{1+x}{x}=\frac{1061963}{1000000}$; y $x=16$ poco menos: de suerte que el aumento $\frac{1}{x}$ cada año debería haber sido de $\frac{1}{16}$.

¿Cuánto debería aumentarse un pueblo cada año para ser al fin de cada siglo dos veces mas numeroso? Siendo n el número de sus habitantes y $\frac{1}{x}$ la razon en que se aumenta; habria al fin de un siglo $\left(\frac{1+x}{x}\right)^{100}\times n$, y pues que este número ha de ser $2n$; será.... $\left(\frac{1+x}{x}\right)^{100}\times n=2n$ y $\frac{1+x}{x}=2^{\frac{1}{100}}$: luego $l\frac{1+x}{x}=\frac{1}{100}\,l2=0{,}0030103$: con que $\frac{1+x}{x}=$

$\frac{10069555}{10000000}$, y $x=144$; tendrian pues que aumentarse en $\frac{1}{144}$ cada año.

Para saber cuantos años se necesitan para que n de personas sea diéz veces mayor, aumentándose cada año $\frac{1}{100}$; haciendo x el número de años, seriá $n(\ )^x=10n$, ó $\left(\frac{101}{100}\right)^x=10$, y se sacará $x=\frac{l10}{l101-l100}=$.....

$\frac{10000000}{43214}=231$. En estos problemas sacados de la *Introduccion al Analisis de los infinitos*, una de las mejores producciones del celebre *Leonardo Eulero*, se han tomado los logaritmos de tablas que tienen diez decimales, como las escelentes de *Ulak*.

460 Tratemos ya *de sacar el logaritmo de un número cualquiera*, por un método mas espedito que el que esplicamos (228 *t.* I). Supongámosle $1+x$, y que $(1+x)^m$ sea igual á otro número $1+z$; será $1+z=(1+x)^m$, y $z=mx+\frac{1}{2}m(m-1)xx+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^3+$&c. Sea.. $l(1+x)=Ax+Bxx+Cx^3+Dx^4+$&c. y $l(1+z)=Az+Bzz+Cz^3+Dz^4$; tendremos $l(1+z)=l(1+x)^m=ml(1+x)=(mAx+mBxx+mCx^3+$&c.$)=(Az+Bzz+Cz^3+Dz^4+$&c.$)$: póngase en este último miembro el valor de z que sacamos antes, y se reducirá la ecuacion á esta.......

$mAx+mBxx+mCx^3+mDx^4+$&c. $=$

$$\left\{\begin{matrix} mAx + \frac{1}{2}m(m-1)Axx + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.\ 3}Ax^3 + \&c. \\ + mmBxx \qquad\qquad + m^2Cx^3 + \&c. \end{matrix}\right.$$

en donde reduciendo y comparando los términos homólogos, resulta $A - A = 0$, $B = -\frac{1}{2}A$, $C = \frac{1}{3}A$, $D = -\frac{1}{4}A$ &c. luego $l(1+x) = A\left(x - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5\ \&c.\right)$. Aquí se ve que á $1+x$ corresponderán diferentes logarítmos segun los diferentes valores que se den á la indeterminada A que se llama *modulo*: pero haciendo $x = 0$, siempre se tiene $l\,1 = 0$, como lo digimos (454). De la suposicion $A = 1$, resultan los logarítmos hiperbólicos, que por mas sencillos, se llaman *naturales*: y como por ellos se pueden sacar los de los demas sistemas, multiplicándolos por el módulo correspondiente A, hablarémos de los hiperbólicos.

Y por cuanto la série sacada para el $l(1+x)$ es poco convergente, aun cuando x es un número pequeño; sacarémos para darla una forma mas ventajosa, el $l(1-x) = -x - \frac{1}{2}xx - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \&c.$ y será $l(1+x) - l(1-x) = l\frac{1+x}{1-x} = \left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \&c.\right)$ série por la que se sacará el logarítmo hiperbólico de un número cualquiera mayor que 1, y que será muy convergente: pues igualando el número á $\frac{1+x}{1-x}$, siempre x será

menor que 1. Para sacar por eg., el logarítmo de 2, haremos $2=\frac{1+x}{1-x}$, y será....

$x=\frac{1}{3}$; luego $l\,2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}+\&c.\right)=0{,}6931458$. Del mismo modo hubiéramos sacado $l\,10=2{,}30258509$. El duplo del logarítmo de 2 es el de 4, el triplo el de 8: la suma de los de 2 y 3 será logarítmo de 6: la mitad del de 10 será el de 5, y así de los demas que se sacarán facilísimamente calculados los de los números primeros.

461 Siendo 2,20258509 el logarítmo hiperbólico de 10, y el de las tablas 1; tendremos $1=A\times 2{,}30258509$: de consiguiente $A=\frac{1}{2{,}30258509}=0{,}43429448$, valor del módulo de los logarítmos de las tablas, por el que se deben multiplicar para reducirlos á hiperbólicos: y estos al contrario, se reducirán á los de las tablas, partiéndolos por...... 0,43429448.

462 *Si dado un logarítmo, se nos pidiese el numero que le corresponde*; suponiendo z el logarítmo dado, y $1+x$ el número que se busca; será (458) $z=x-\frac{1}{2}xx+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5-\&c.$ Para averiguar ahora el valor de x en z (453), sea $x=Az+Bzz+Cz^3+Dz^4+\&c.$ y será......

$$z = \begin{cases} Az + Bzz + Cz^3 + Dz^4 + \&c. \\ -\tfrac{1}{2}AAzz - ABz^3 - \tfrac{1}{2}BBz^4 - \&c. \\ -ACz^4 - \&c. \\ +\tfrac{1}{3}A^3z^3 + AABz^4 - \&c. \\ -\tfrac{1}{4}A^4z^4 - \&c. \end{cases}$$

De donde se saca $A=1$, $B=\frac{1}{2}$, $C=\frac{1}{6}$, $D=\frac{1}{24}$ &c. luego $x=z+\frac{zz}{2}+\frac{z^3}{2.3}+\frac{z^4}{2.3.4}+\ldots\ldots \frac{z^5}{2.3.4.5}+$ &c. y finalmente $1+x=1+z+\frac{zz}{2}+\frac{z^3}{2.3}+\frac{z^4}{2.3.4}+$&c. En general, un número cualquiera $n=1+ln+\frac{(ln)^2}{2}+\frac{(ln)^3}{2.3}+\ldots \frac{(ln)^4}{2.3.4}$ &c. série que siempre es convergente, y de consiguiente que resuelve la cuestion. Apliquémosla á encontrar la base de los logarítmos hiperbólicos, de que se usa mucho en el cálculo integral: y pues su logarítmo es 1, tendremos $n=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}$ $=2,71828183$. Adviértase que el logarítmo dado se reduce á hiperbólico antes de la operacion, cuando no lo es.

ARTICULO III

CÁLCULO DIFERENCIAL

463 Supuesto que debe haber igual ra-

zon entre las cuantidades variables y los aumentos ó decrementos semejantes que les sobrevengan; es evidente que si por medio de estos conseguimos determinar dicha relacion entre las cuantidades, quedará ésta determinada aunque reduzcamos á cero ó hagamos desvanecer los tales elementos, como que son partes infinitamente pequeñas de las cuantidades. Este arbitrio para descubrir las cuantidades por medio de sus elementos, es el objeto del *cálculo diferencial*, como veremos mas claramente en los egemplos, despues que hayamos enseñado á espresar algébricamente los elementos de toda clase de cuantidades, que por el modo con que se sacan, se llaman *diferenciales*, y que se representan con la letra *d* puesta al lado de la cuantidad cuyas partes significa. Pero no se debe confundir este cálculo con el de las *diferencias finitas* de las cuantidades variables que hace con ellas las mismas operaciones que el diferencial é integral con las diferencias infinitamente pequeñas.

Si las cuantidades variables x, y crecen en un instante de una parte infinitamente pequeña dx dy; vendrán á ser $x+dx$, $y+dy$, y la diferencia entre lo que son ahora y lo que antes eran, será $x+y+dx+dy-x-y=dx+dy$: estas son las *diferenciales* de x, y, que se *sacarán de cualesquiera cuantidades sumadas ó restadas juntando á cada variable la letra característica d*, que se pone despues

el coeficiente si le hubiese: pues si $3x$ crece de $3dx$, será su diferencial $3x+3dx-3x=3dx$: la de $ay-z$ es $ady-dz$, y la de $2cx+ab-\frac{my}{n}$ es $2cdx+\frac{mdy}{n}$. En ab y en cualquier otra cuantidad constante es cero la diferencial; pues no crece ni mengua su valor. Hemos supuesto y supondrémos en lo sucesivo, que las variables crezcan y vengan á ser $x+dx$, $y+dy$; pero llévese entendido que si menguan, serán $x-dx$, $y-dy$, y sus diferenciales $-dx-dy$: y si creciendo x decrece y, serán dichas diferenciales $dx-dy$.

464 Para diferenciar xz, multiplicarémos estas cuantidades aumentadas $(x+dx)\times(z+dz)$, y restando xz del producto $xz+xdz+zdx+dxdz$; quedará $zdx+xdz+dzdx$ por diferencial de xz: que se reduce á $zdx+xdz$, despreciando el infinitamente pequeño de 2.° órden $dxdz$ respecto de zdx y xdz que lo son de 1.° (442): luego en las *cuantidades multiplicadas se diferencia cada variable considerando á las otras como constantes*. Y así la diferencial de xyz será $xydz+xzdy+yzdx$, diferenciando primero como si xy fuesen constantes, despues como si lo fuesen xz, y por último como si lo fuesen yz: y la de $5axz-\frac{b}{a}yz$, ó $d\left(5axz-\frac{b}{a}yz\right)=5axdz+5azdx-\frac{b}{a}ydz-\frac{b}{a}zdy$. Para no equivocarse, con-

viene escribir la última la variable que se diferencia.

465 Por esta misma regla será la diferencial de xx, $xdx+xdx=2xdx$: la de x^3, $xxdx+xxdx+xxdx=3xxdx$: la de x^4, $4x^3dx$, y en general la de x^m, $mx^{m-1}dx$: luego *una cuantidad variable elevada á cualquier potencia se diferencia multiplicando por el esponente de la potencia la cuantidad disminuido su esponente de 1, y por la diferencia de la variable*: de manera que la diferencial de ax^5 ó $d(ax^5)$ será $5ax^4dx$: $d(z^{-2})=-2z^{-3}dz$: $d(x^{\frac{3}{5}})=\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}dx$: $d(y^{-\frac{3}{8}})=-\frac{3}{8}y^{-\frac{11}{8}}dy$. La diferencial de ax^3z^2, considerando á x^3z^2, como dos variables simples, es $ax^3(d(zz)+az^2(d(ax^3)=2ax^3zdz+3az^2x^2dx$: en general, $d(ax^m z^n)=ax^m(d(z^n)+az^n(d(x^m)=$.......... $nax^mz^{n-1}dz+maz^nx^{m-1}dx$.

466 Si el quebrado $\frac{x}{z}$ se escribe así xz^{-1} (117 *t.* I); será su diferencial $z^{-1}dx-xz^{-2}dz=\frac{dx}{z}-\frac{xdz}{zz}=\frac{zdx-xdz}{zz}$: *luego si se multiplica la diferencial del numerador de un quebrado variable por el denominador, y la de este por el numerador, y restando este producto del primero, se divide el residuo por el cuadrado del denominador; se tendrá la diferencial del quebrado*. Y así $d(\frac{3z^2-x}{bx})=$..............................

$\frac{6bxzdz-3bz^2dx-b^2dx}{bax}$.

Con estas reglas podremos diferenciar cualesquiera cuantidades algébricas. Por egemplo, $d\left(\frac{1}{z}\right)=-\frac{dz}{zz}$: $d(2x^3z-cz^2yx-ab)=2x^3dz+6zx^2dx-cz^2ydx-cz^2xdy-2cxyzdz$: $d(c-az+bx^3)^4$ contando toda la cuantidad por una variable, es $4(c-az+bx^3)^{4-1}\times d(c-az+bx^3)=4(c-az+bx^3)^3\times(-adz+3bx^2dx)$: y por igual razon, tratando á los dos factores como dos variables, $d\left(ax^2\times(mz^3+a-z)^{\frac{1}{2}}\right)=(mz^3+a-z)^{\frac{1}{2}}\times(d(ax^2))+ax^2\times d(mz^3+a-z)^{\frac{1}{2}}=2axdx(mz^3+a-z)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}ax^2(mz^3+a-z)^{-\frac{1}{2}}\times(3mz^2dz-dz)$.

Cuando hay radicales se convierten en sus iguales con esponentes fraccionarios (140 *t.* I) y así $d(\sqrt{z})=d\left(z^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}dz=\frac{dz}{2\sqrt{z}}$:....

$d(\sqrt[4]{x^5})=d\left(x^{\frac{5}{4}}\right)=\frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}dx$: $d(\sqrt{(ab-xx)})=d(ab-xx)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(ab-xx)^{-\frac{1}{2}}\times d(ab-xx)=-xdx(ab-xx)^{-\frac{1}{2}}=-\frac{xdx}{\sqrt{(ab-xx)}}$:..................

$d\left(a\sqrt[m]{(cx-az^2)^n}\right)=d\left(a(cx-az^2)^{\frac{n}{m}}\right)=\frac{n}{m}a\times$.......

$(cx-az^2)^{\frac{n}{m}-1}\times(cdx-2azdz)$: y......................

$d\left(\frac{\sqrt{(x^2-a^2z)^m}}{(x+b)^3}\right)=d(x+b)^{-3}\times(x^2-a^2)^{\frac{m}{2}}$.

$= \frac{m}{2}(x+b)^{-3} \times (x^2 - a^2z)^{\frac{m}{n}-1} \times (2xdx - aadz)$

$-3dx(xx-aaz)^{\frac{m}{2}} \times (x+b)^{-4} = \&c.$

467 *La diferencial segunda* de una cantidad se saca diferenciando de nuevo el resultado de la 1.ª, y se representa con dos dd: *la diferencia* 3.ª se espresa con tres ddd, y viene á ser una nueva diferenciacion de la 2.ª &c. ddx ó d^2x indica la diferencial 2.ª de x:$dddx$ ó d^3x la diferencial 3.ª &c. pero no se ha de equivocar d^2x, d^3x..... d^mx diferencia 2.ª 3.ª ...mª de x, con $dx^2 = dxdx$, $dx^3 = dxdxdx$.... dx^m, cuadrado, cubo y potencia m de dx; así como dx^2, dx^3....dx^m son distintos de $d(x^2)$, $d(x^3)$.....$d(x^m)$ que indican la 1.ª diferencial de x^2, de x^3, de x^m.

Será pues la 2.ª diferencial de x, ddx: la de xz, se saca diferenciando de nuevo su primera diferencial $xdz+zdx$, tomando á x, dz, z, dx, como otras tantas variables: y es $xddz+dzdx+zddx+dxdz = xddz+2dzdx+zddx$: la de xx en cuya primera diferencial $2xdx$ se consideran dos variables $2x$ y dx. es $2xddx+2dx^2$: y generalmente, la 2.ª diferencial de x^m ó $d(mx^{m-1}dx)$, es $mx^{m-1}ddx+m(m-1)x^{m-2}dx^2$: como tambien $dd\left(\frac{x}{z}\right) = d\left(\frac{zdx-xdz}{zz}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{z^3 ddx + z^2 dxdz - z^2 xddz - 2z^2 dxdx - z^2 dxdz +}{z^4}$

$\frac{2xzdz^2}{z^4} = \frac{z^2 ddx - zxddz^2 - 2zdxdz + 2xdz^2}{z^3}$. Lo mismo se practíca para diferenciar las cuantidades en que haya ya diferenciales primeras. Y así diferenciando de nuevo zdx, resulta $d(zdx) = dzdx + zddx$: $d(\frac{dx}{dy}) = \frac{dyddx - dxddy}{dy^2}$. .... $d(\sqrt{(dz^2+dx^2)}) = d(dz^2+dx^2)^{\frac{1}{2}} =$ .... $\frac{1}{2}(dz^2+dx^2)^{-\frac{1}{2}} \times d(dz^2+dx^2) = \frac{dzddz + dxddx}{\sqrt{(z^2+dx^2)}}$: y $d(\frac{ydx}{dy}) = d(ydxdy^{-1}) = dx + \frac{yddx}{dy} -$ ..... $\frac{ydxddy}{dy^2}$.

468 Si en un cálculo en que haya diferenciales primeras de distintas variables, referimos á una como á término de comparacion todas las demas; es decir, si suponemos constante una de dichas primeras diferenciales, se desvanecerán los términos en que entren las diferenciales segundas de dicha variable que son cero (461), y el cálculo quedará mas sencillo. Por egemplo, la segunda diferencial de $\frac{dx}{dy}$ suponiendo á dx constante, es............ $-dxdy^{-2} ddy = \frac{-dxddy}{dy^2}$: y suponiendo constante á dy, es $\frac{ddx}{dy}$; por ser en el 1.^r caso

$ddx=o$, y en el 2.º $ddy=o$.

Las diferenciales terceras se sacan del mismo modo que las segundas, tomando á las cuantidades variables, á sus diferenciales primeras y segundas, como otras tantas variables: y lo mismo se debe practicar para las diferenciales cuartas, quintas &c. advirtiendo que en todas las diferenciaciones se ha de contar por constante la diferencial que en las anteriores se haya supuesto tal. Finalmente, las cuantidades omitidas en la 1.ª diferenciacion (462) no alteran el cálculo de la 2.ª; pues vueltas á diferenciar aquellas que eran de 2.º órden, hubieran resultado de 3.º, cuya omision nada quita á las de 2.º (442).

Modo de diferenciar cuantidades que incluyen senos, cosenos &c. las logarítmicas y esponenciales

469 Si el seno x de un ángulo ó arco llega á ser xdx, tendremos (271) suponiendo $r=1$, $sen\,(x+dx)=sen\ x\ cosen\ dx+sen\ dx\ cosen\ x$: y como el seno de un arco dx infinitamente pequeño se confunde con el arco, esto es, $sen\ dx=dx$, y su coseno es el radio (263) ó $cosen\ dx=1$; será $sen\,(x+dx)=sen\ x+dx\ cosen\ x$: tomemos pues la diferencial, y resultará $d\,(sen\ x)=d\,(sen\ x+dx)=sen\ x+dx\ cosen\ x-sen\ x=dx\ cosen\ x$, ó *la diferencial de un* $sen\ x$, *cuyo radio es* 1, *es el*

producto de la diferencial de su ángulo multiplicada por su coseno.

Tambien $coseno\ (x+dx) = cosen\ x\ cosen\ dx - sen\ x\ sen\ dx$ (271): luego siendo $sen\ dx = dx$, $cosen\ dx = 1$; será $cosen\ (x+dx) = cosen\ x - dx\ sen\ x$; y $d(cos\ x) = d(\ cos\ x + dx\ ) = cosen\ x - dx\ sen\ x - cosen\ x = -dx\ sen\ x$: es decir, *la diferencial del coseno de un ángulo ó arco cuyo radio es 1, igual al producto negativo de la diferencial del ángulo multiplicada por su seno.* En virtud de estas dos reglas y de las anteriores, tendremos que $d\ (sen\ 4x) = 4dx\ cos\ 4x$: $d(sen\ ax) = adx\ cosen\ ax$: $d\ (cosen\ mz) = -mdz\ sen\ mz$: $d(\ sen\ x\ cosen\ z) = cosen\ z \times d(sen\ x) + sen\ x \times d(cosen\ z) = cosen\ z dx\ cosen\ x - sen\ x dz\ sen\ z$: y $d(sen\ x)^m = m(sen\ x)^{m-1} d(sen\ x) = mdx\ cos\ x\ (sen\ x)^{m-1}$.

470 Por ser $tang\ x = \frac{sen\ x}{cos\ x}$ (267), será

$$d\ (tang\ x) = d\ \left(\frac{sen\ x}{cosen\ x}\right) = \frac{dx\ cosen^2 x + dx\ sen^2 x}{cosen^2\ x}$$

$$(464) = \frac{dx}{cosen^2 x}(cosen^2 x + sen^2 x) = -\frac{dx}{cosen^2 x}$$

por ser $cosen^2 x + sen^2 x = rr = 1$ (268): y será *la diferencial de la tangente de un arco ó ángulo cuyo radio es 1, el cociente de la diferencial del ángulo partida por el cuadrado de su coseno*: y como en $d\ (tang\ x) = \frac{dx}{cosen^2 x}$, es $dx = cosen^2 x \times d\ (tang\ x)$; *será la diferencial del ángulo el producto de la diferencial de su*

tangente multiplicada por el cuadrado de su coseno. Tambien es la diferencial de la cotangente del tal angulo el cociente negativo de la diferencial de dicho ángulo partida por el cuadrado de su seno; pues siendo $d(cotang\ x)=$ $d(\frac{cosen\ x}{sen\ x})$ (268) $=-\frac{dx\ sen^2 x - dx\ cosen^2 x}{sen^2 x}$ (464) $=-\frac{dx}{sen^2 x}(sen^2 x + cosen^2 x)$; será $d(cotang\ x)=-\frac{dx}{sen^2 x}$: por ser $sen^2 x+cosen^2 x=1$. Con estas reglas y las hasta aquí dadas, será facil deferenciar cualesquiera cuantidades que contengan senos, cosenos, tangentes &c.

471 Para la diferenciacion de las *cuantidades logarítmicas*, sea x un número, cuyo logarítmo natural designo por lx, y haciendo $lx=z$, será $z+dz=l(x+dx)$: de donde se saca dz ó $d(lx)=l(x+dx)-lx=l(\frac{x+dx}{x})=$ $l(1+\frac{dx}{x})=\frac{dx}{x}-\frac{dx^2}{2x^2}+\frac{dx^3}{3x^3}-$ &c. (458) $=\frac{dx}{x}$ (442): *es decir que la diferencial del logaritmo de un número cualquiera x es su diferencial dx dividida por el mismo número x.*

472 En virtud de lo cual $d(ly)=\frac{dy}{y}$: $d\,l(a+x)=\frac{dx}{a+x}$: $d\,l(\frac{a}{a+x})=d(la-l(a+x))$

$=\frac{-dx}{a+x}$: $dl\frac{1}{x}=d(l1-lx)=\frac{-dx}{x}$: $dlx^2=$...... $d(2lx)=\frac{2dx}{x}$: $dlx^n=d(nlx)=\frac{ndx}{x}$: $d(lxz)=d(lx+lz)=\frac{dx}{x}+\frac{dz}{z}=$...... $\frac{zdx+xdz}{xz}$: $d(\frac{lx}{z})=d(x-lz)=\frac{dx}{x}-\frac{dz}{z}$: $d(l\frac{c+z}{a-x})=\frac{dz}{c+z}-\frac{dx}{a-x}$: $d(l(bb-yy))=\frac{-2ydy}{bb-yy}$: $d(l\sqrt{(aa+zz)})=\frac{d(\sqrt{(aa+zz)})}{\sqrt{(aa+zz)}}=$

$\frac{zdz}{aa+zz}$: $d(lz^m\sqrt[n]{(a+cx^q)^p})=dlz^m+d(la+cx^q)^{\frac{p}{n}}=$

$d(mlz+d)^{\frac{p}{n}}l(a+cx^q)=\frac{mdz}{z}+\frac{\frac{p}{n}qxc^{q-1}dx}{(a+cx^q)}$.

En la espresion $d(l.ly)$ supongo $ly=x$, será $d(l.ly)=dlx=\frac{dx}{x}$: y como $d(ly)=\frac{dy}{y}=dx$; si se sustituyen en lugar de x y dx sus valores, resultará por último, $d(l.ly)=\frac{dy}{yly}$.

473 Las cuantidades *esponenciales* son aquellas que tienen por esponente una cuantidad variable como x^z, y^x. Para diferenciarlas supongamos $x^z=y$, será $lx^z=ly$, y $dlx^z=\frac{dy}{y}$, ó $dy=ydlx^z$: pongamos por y su valor x^z, y tendremos dy ó $dx^z=x^zdlx^z$; esto es,

la diferencial de una cuantidad esponencial x^z es el producto de dicha esponencial multiplicada por dlx^z, diferencial de su logaritmo; de suerte que $dx^z = x^z dlx^z = x^z \left(dzlx + \ldots\ldots \frac{zdx}{x}\right)$: $d(a^x + y^z) = d^x dla^x + y^z dly^z = \ldots\ldots$ $a^x dxla + y^z \left(dzly + \frac{zdy}{y}\right)$: $d(aa + x^2)^x = (aa + x^2)^x \times dl(aa + x^2)^x = (aa + x^2)^x \left(dxl(aa + x^2) + \frac{2xxdx}{aa + xx}\right)$.

474 Si se hubiera de diferenciar c^x en el supuesto de ser c un número cuyo logarítmo es 1; se tendria $d(c^x) = c^x dlc^x = c^x dxlc$, y como $lc = 1$, será $dc^x = c^x dx$: espresion de la diferencial de la base de los logarítmos hiperbólicos. Las diferenciales segundas, terceras &c. de las cuantidades esponenciales, de las logarítmicas, y de las que contienen senos, cosenos, &c. se sacan conforme digimos (465).

ARTICULO IV

Aplicacion del Cálculo diferencial á las lineas curvas

475 Supuesto que una curva viene á ser un polígono de infinitos lados, de los cuales uno de ellos Mm alargado hasta T formaria la tangente TM (fig. 173); sea pm una ordenada infinitamente próxima á la PM, y Mr una

paralela al ege SH: si llamamos á PM, y; SP, x; será Pp=Mr, dx; mr, dy; y $Mm=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ en el triángulo rectángulo Mmr. En los triángulos semejantes Mmr, MPT se tendrá 1.° rm:Mr::MP:PT, ó $dy:dx::y:\text{PT}=\frac{ydx}{dy}$: espresion general de la subtangente de cualquier curva, en la que substituyendo por y, y $\frac{dx}{dy}$ sus correspondientes valores sacados de la ecuacion de la curva de que se trate, saldrá el de su subtangente: y de consiguiente se tendrá el punto T por el que se podrá tirar la tangente á un punto M dado.

2.° Tambien se tiene en dichos triángulos rm: Mm:: PM: TM ó $dy: \sqrt{(dx^2+dy^2)}$:: $y: \text{TM}=\frac{y\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dy}=y\sqrt{(\frac{dxx}{dy^2}+1)}$: espresion general de la tangente. 3.° La de la subnormal se saca de los triángulos semejantes Mmr, PMR en que Mr: mr:: PM: PR, ó $dx:dy::y:\text{PR}=\frac{ydy}{dx}$. 4.° La proporcion M$r$: M$m$::PM:MR, ó $dx:\sqrt{(dx^2+dy^2)}::y:\text{PR}=\frac{y\times\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx}=y\sqrt{(\frac{dy^2}{dxx}+1)}$, da el valor de la normal. 5.° Finalmente, tirada por S la SD paralela á PM, en los triángulos semejantes TSD, TPM tendremos PT:PM::ST= PT—SP:SD; ó $\frac{ydx}{dy}:y::\frac{ydx}{dy}-x:\text{SD}=y-\frac{xdy}{dx}$.

Con los valores de ST y SD sacados de la ecuacion á la curva, se tendrán suponiendo en ellos x infinita, dos puntos T, D por donde deben pasar las asíntotas de la curva que las tenga. Con efecto, en la tangente á una distancia infinita los puntos T y D, se confundirán con C y B por donde sabemos que pasan las asíntotas de la hipérbola (410).

476 Para aplicar estas fórmulas al círculo; tomemos su ecuacion $yy=aa-xx$, que diferenciada es $2ydy=-2xdx$: despéjese en ella la espresion de la subtangente, y será.... $\frac{ydx}{dy}=-\frac{yy}{x}=-(\frac{aa-xx}{x})=\text{PT}$, poniendo por yy, $aa-xx$. El signo indica que la PT se ha de tomar hácia el centro desde donde se cuentan las abscisas, al contrario de como se tomó en la fórmula para la cual se contaron desde el vértice (473). En la ecuacion $yy=2ax-xx$ en que igualmente se cuentan desde el vértice(348),se tiene $\frac{ydx}{dy}=\frac{yy}{a-x}=...\frac{2ax-xx}{a-x}$: que da la proporcion $a-x$: $2a-x$:: x: PT, ó AP: PB:: CP: PT. Tambien se encuentra en la ecuacion $yy=aa-xx$ diferenciada, la subnormal $\frac{ydy}{dx}=-x$: y la normal $\sqrt{yy+(\frac{yydy^2}{dx^2})}=\sqrt{(xx+yy)}=a$, radio del círculo.

477 En la parábola, cuya ecuacion es

$yy=px$, se tiene diferenciando, $2ydy=pdx$: luego la subtangente $PT=\frac{ydx}{dy}=\frac{2yy}{p}=2x$, poniendo px en lugar de yy: la subnormal $\frac{ydy}{dx}=\frac{py}{2y}=\frac{1}{2}p$: y así de las demas. En la elipse cuya ecuacion diferenciada es $2ydy=\frac{bb}{aa}(-2xdx)$; se tiene la subtangente $PT=\frac{ydx}{dy}=-\frac{aa}{bx}(bb-\frac{bbxx}{aa})=-\frac{a^2-xx}{x}$, y la subnormal $PR=\frac{ydy}{dx}=-\frac{bbxy}{aay}=-\frac{bbx}{aa}$, ambas negativas por contarse las abscisas al reves que en la fórmula.

478 Del mismo modo encontraremos en la hipérbola la subtangente $PT=\frac{ydx}{dy}=x-\frac{aa}{x}=\frac{xx-aa}{x}$, y la subnormal $PR=\frac{ydy}{dx}=\frac{bbx}{aa}$. En su ecuacion á las asíntotas $xy=mm$, se saca $xdy+ydx=0$, y la subtangente será $\frac{ydx}{dy}=-x$: de suerte que se debe tirar la $p't$ del lado opuesto al punto C origen de las abscisas, y así se tirará por t y m la tangente tm'. Para determinar sus asíntotas tomemos la ecuacion $yy=\frac{bb}{aa}(2ax+xx)$, y difirenciada,

despejemos $\frac{ydx}{dy}-x$ en su resultado $2a^2ydy=2adx+2xdx$, y hallaremos $\frac{ydx}{dy}-x=\frac{ax}{a+x}$, que se reduce á $a=SC$, suponiendo x infinita. Despejando despues $y-\frac{xdy}{dx}$, sale $b=SB$: luego las asíntotas deberán pasar por C y B. Cuando resulta infinito el valor de SB, siendo SC finito, es señal de que la asíntota es paralela á la ordenada PM: y lo será al ege de las abscisas, cuando SB es finito y SC infinito.

479 Del triángulo rectángulo rMm (473) se saca, haciendo al radio 1, $rm:rM::1:tang\ rmM=\frac{rM}{rm}=\frac{dx}{dy}$, y $rM:rm::1:tang\ rMm=\frac{rm}{Mr}=\frac{dy}{dx}$. Será pues, $\frac{dx}{dy}$ la espresion de la tangente del ángulo rmM que forma la curva ó su tangente en cada punto con la ordenada, y $\frac{dy}{dx}$ la de la tangente rM que forma con el ege de las abscisas: de consiguiente si despejamos en la ecuacion de una curva, despues de diferenciada, $\frac{dx}{dy}$ ó $\frac{dy}{dx}$; tendremos respecto de ella el valor de dichos ángulos: y al contrario, para saber en qué punto forma la curva un ángulo conocido con su ordenada, se igualará el valor de la tangente de dicho

ángulo con el de $\frac{dx}{dy}$, sacado de la ecuacion diferenciada de la curva; pues poniendo en el resultado en lugar de y su valor, el de x será el punto que se busca, sino es imaginário ó absurdo; pues entonces en ningun punto formará la curva dicho ángulo.

480 La ecuacion $y^{m+n}=p^m x^n$ (429) de las parábolas de todos géneros diferenciada es $(m+n)y^{m+n-1}dy=np^m x^{n-1}dx$: de consiguiente $dx=\frac{(m+n)y^{m+n-1}dy}{np^m x^{n-1}}$; que sustituido en $\frac{ydx}{dy}$, da reduciendo, $\frac{ydx}{dy}=\frac{m+n}{n}x$. Del mismo modo se saca $\frac{ydx}{dy}=-\frac{m}{n}x$ de la ecuacion general $y^m x^n=c^{m+n}$ de las hipérbolas entre las asíntotas, que diferenciada es $my^m x^{n-1}dx+mx^n y^{m-1}dy=0$, y en la que $dx=\frac{mx^n y^{m-1}dy}{ny^m x^{n-1}}$.

481 Si se diferencia la ecuacion $y^{m+n}=\frac{p}{a}x^m(a-x)^n$ á las elipses de todos géneros, y del resultado $(m+n)y^{m+n-1}dy=\frac{p}{a}(mx^{m-1}dx)(a-x)^n-nx^m(a-x)^{n-1}dx)$, se saca $dx=\frac{(m+n)y^{m+n-1}dy}{\frac{p}{a}(mx^{m-1}(a-x)^n-nx^m(a-x)^{n-1}dy)}$; se tendrá la subtangente $\frac{ydx}{dy}=$..............................

$$\frac{(m+n)y^{m+n}dy}{\frac{p}{a}(mx^{m-1}(a-x^n-nx^m(a-x)^{n-1}dy}=\ldots\ldots$$

$$\frac{m+n\times\frac{p}{a}x^m(a-x^n)}{\frac{p}{a}(mx^{m-1}(a-x)^n-nx^m(a-x)^{n-1})}$$, quitando dy, y poniendo $\frac{p}{a}x^m(a-x)^n$ en lugar de y^{m+n}: quítese $\frac{p}{a}$, y divídanse los dos términos por $x^{m-1}(a-x)^{n-1}$, y se tendrá finalmente, $\frac{xdy}{dy}=\frac{(m+n)x(a-x)}{m(a-x)-nx}=\frac{(m+n)x(a-x)}{am-mx-nx}$. Por un cálculo semejante se saca tambien $\frac{ydx}{dy}=\frac{(m+n)x(a+x)}{am+mx+nx}$ de la ecuacion $y^{m+n}=\frac{p}{a}x^m\times(a+x)^n$ á las hipérbolas de todos géneros.

482 En la logarítmica en la que (436) $x=Aly$, y $dx=\frac{Ady}{y}$; se tiene $\frac{ydx}{dy}=A$: es decir, que su subtangente es constante é igual siempre al módulo.

483 Supongamos ahora una curva BOC (fig. 205) con otra BMA tal que alargada la perpendicular PO hasta M, la relacion de MP al arco BO sea espresada por una ecuacion cualquiera: y que se trate de tirar una tangente al punto M de la curva BMA. Sea mp una ordenada infinitamente próxima á MP, tírese Mr paralela á OR tangente de la

curva BOC, y supongo BOC$=x$, MP$=y$; será Pp ó M$r=dx$, $mr=dy$: y de los triángulos semejantes Mmr, RMP se sacará mr: Mr:: MP: PRO ó $dy : dx :: y :$ PR$=\frac{ydx}{dy}$, que será la fórmula de la subtangente que se busca; cuyo valor debe tomarse sobre la tangente RP de la curva BOC. Si esta fuese un círculo, y la BMA es tal que $y=\frac{b}{a}x$; será una cicloide (438): y pues que diferenciando, resulta $dy=\frac{bdx}{a}$; será PT$=\frac{bdx}{dy}=\frac{abx^2}{abx}=x$.

484 Si dado un círculo AHBO (fig. 200), se pidiese tirar una tangente al punto M de una curva CKM cuya relacion con el radio CM se esprese por una ecuacion cualquiera; tirado el radio Cmn infinitamente próximo á CN, descrito el arco Mr infinitamente pequeño con el radio CM, y levantando en CM la perpendicular CT: supongo AC$=$CN$=a$, CM$=y$, y el arco AHBN$=x$; será N$n=dx$, $rm=dy$. Los sectores semejantes CNn, CMr dan CN (a): CM (y):: Nn (dx): M$r=\frac{ydx}{a}$: y de los triángulos semejantes CTM, Mmr, en los que rm:Mr:: CM: CT ó dy: $\frac{ydx}{a}$::y:CT, se saca CT$=\frac{y^2dx}{ady}$, que es la espresion de la subtangente que se pide.

Sea la curva CKM la espiral de Arquímedes en la que $y=\frac{ax}{c}$ (433), y diferenciando $dy=\frac{adx}{c}$, $dx=\frac{cdy}{a}$: sustituyo este valor en $CT=\frac{y^2dx}{ady}$, y tendré $CT=\frac{cy^2dy}{a^2dy}$, que se reduce poniendo $\frac{a^2x^2}{c^2}$ en lugar de y^2, á $CT=\frac{xy}{a}=$ *al arco* DSM; pues CN (a): CM (y):: AHBN (x): $DSM=\frac{xy}{a}$: luego si trazando un círculo con el radio $CM=y$, se toma CT igual al arco DSM, se tendrá el punto T desde el cual se ha de tirar la tangente TM.

485 En la espiral hiperbólica, cuya ecuacion $xy=ab$ (435) diferenciada es $ady+ydx=0$, $ydx=-xdy$; se tiene $CT=-\frac{xydy}{ady}=-\frac{xy}{a}=-b=-$ AG: pues AG (a): AN (x):: CM (y): $b=\frac{xy}{a}$. Será pues, la subtangente de la espiral hiperbólica cuantidad constante como en la logarítmica.

Del método de los maximos y minimos.

486 Para percibir la economía de este método que se dirige á encontrar las mayores ó menores cuantidades que crecen ó menguan segun cierta ley, ó que tienen en mayor gra-

do que todas sus semejantes alguna propiedad determinada; concibamos que la ordenada PM (fig. 174) de una curva SMBM′s crece hasta llegar á ser la mayor BC; crecerá la subtangente en la fig. 1.ª hasta que en el punto B resulte infinita, por ser paralela la tangente BR al ege de las abscisas Ss, y menguará en la fig. 2.ª hasta desvanecerse, por confundirse la tangente con la ordenada CB. Si dicha ordenada continúa hasta *s*, será la subtangente negativa, que va aumentando en la fig. 2.ª y menguando en la 1.ª. Las mismas observaciones tienen lugar respecto del ege A*a*, y de la ordenada p'M′ que va menguando hasta llegar á ser la menor B*c*; luego 1.° *una cuantidad que pasa de positiva á negativa, ó pasa por el infinito si crece, ó por cero si mengua.*

487 2.° En el punto B (fig. 1.ª) se desvanece el ángulo que la tangente forma con el ege de las abscisas Ss, y en la fig. 2.ª el que forma con el de las ordenadas: es decir, que en estos puntos es cero $\frac{dx}{dy}$ y $\frac{dy}{dx}$ (477): y como dichos puntos son los de las mayores y menores ordenadas, tendremos *que en ellos es cero la diferencial dx ó dy de la variable.* Como la espresion de cualquiera cuantidad variable se puede considerar como el valor de la ordenada de una curva; podremos inferir generalmente, que para averiguar los puntos

del máxîmo y mínimo de cualquiera cuantidad, se ha de diferenciar su espresion, y suponiendo su diferencial igual á cero; resultará el valor ó valores que sustituidos en la primera espresion, darán los puntos del máxîmo ó mínimo: advirtiendo que un valor negativo supone una condicion contraria á la de la cuestion propuesta, y los imaginários prueban que no hay el máxîmo ni el mínimo que se busca. Por este mismo método deben determinarse los puntos en que la tangente es paralela á los eges, y *los límites* de las abscisas y ordenadas de una curva: pues unos y otros no son otra cosa que los del máxîmo y mínimo en este género.

488 De lo dicho podemos colegir que si de resultas de una operacion saliese a por valor de x, y se quisiese saber si a es un máxîmo ó mínimo; sustituiremos sucesivamente en la espresion propuesta en lugar de x, $a+q$, a, $a-q$ (q es una cuantidad cualquiera): y si la sustitucion de las cuantidades estremas diese resultados menores que la de la media, será a un máxîmo; si los diese mayores, será un mínimo: y si siendo el un resultado real, fuese el otro un imaginário, será al mismo tiempo un máxîmo y un mínimo.

489 Egemplo 1.° *Hallar la mayor ordenada y abscisa de la elipse.* Si en su ecuacion $aayy = 2abbx - bbxx$, que diferenciada es $2aaydy = 2abbdx - 2bbxdx$, suponemos $dx=0$, se reducirá á $2aaydy=0$, ó $y=0$: póngase este valor en

la ecuacion $yy=\frac{bb}{aa}(2ax-xx)$, y tendremos $o=2abbx-bbxx$, y $x=2a$: luego *la mayor abscisa en la elipse, contandolas desde el vértice, es el ege mayor.* Si en la ecuacion diferenciada hacemos $dy=o$, tendremos $o=2abbdx-2bbxdx$, donde $x=a$: cuyo valor sustituido en la ecuacion á la curva, la reduce á $aayy=2aabb-aabb$, que da $y=\pm b$: *será pues, el semiege menor la mayor ordenada de la elipse.*

490 2.° *Desde un punto* R (fig. 173) *dado en el ege de una curva cualquiera se pide tirar á ella la recta mas corta que sea posible.* Sea $SP=x$, $PM=y$, $SR=t$, y $MR=u$ que consideraré como ordenada de una curva: será en el triángulo rectángulo MPR, $(MR)^2=(MP)^2+(PR)^2$ ó $uu=tt-2tx+xx+yy$: diferencio, y suponiendo $du=o$ en el resultado $2udu=-2tdx+2xdx+2ydy$, tendré $o=-2tdx+2xdx+2ydy$; donde poniendo el valor de ydy sacado de la ecuacion á la curva, me resultará el de x que se pide. Si fuese por eg., la parábola en la que $yy=px$, $2ydy=pdx$, $ydy=\frac{1}{2}pdx$; sustituido este valor en la ecuacion sacada, resulta $o=-2tdx+2xdx+pdx$, y $\frac{1}{2}p=t-x$: luego siendo $\frac{1}{2}p$ el valor de la subnormal en la parábola (368); será $t-x=PR$ la subnormal; y la menor que se puede tirar desde M á la curva, será la normal MR.

491 3.° *Para dividir un número cualquiera a en dos partes tales que su producto sea mayor que el de otras dos cualesquiera del mismo número*; suponiendo x por una de las partes, será $a-x$ la otra, y $ax-xx$ el producto: si su diferencial $adx-2xdx$ se supone igual á cero; será $adx-2xdx=0$, $adx=2xdx$, y $x=\frac{1}{2}a$: *luego el producto de las dos mitades de a será el máximo.*

492 4.° *Averiguar que triángulo de un perímetro $2p$, tendrá mayor superficie de los que se pueden trazar sobre la base $AB=a$* (fig. 170). Si llamamos y la superficie, x uno de los lados AC que buscamos: será el otro $2p-a-x$: y tendremos (334) $y=\sqrt{(p(p-a)(p-x)(a+x-p))}$, ó cuadrando y valiéndonos de los logarítmos, $2ly=lp+l(p-a)+l(p-x)+l(a+x-p)$. La diferencial de esta cuantidad es $\frac{2dy}{y}=-\frac{dx}{p-x}+\frac{dx}{a+x-p}$, que se reduce suponiendo $dy=0$, á $p-x=a+x-p$, o $2p-a=2x$: luego el duplo $2x$ del lado AC iguala á todo el perímetro menos la base AB: esto es, serán iguales los dos lados, AC, CB, y el triángulo que se busca, es el isósceles. Y como por igual razon debe ser isósceles el construido sobre AC que tenga mayor superficie: podremos asegurar *que el triángulo equilátero es el que incluye mayor superficie entre los de un mismo perímetro.*

493 5.° *Para encontrar el paralelepípe-*

do de mayor cabida entre los de una misma superficie cc, y altura a; supondremos x, y, los dos lados del rectángulo de su base: y pues que de los seis rectángulos que forman su superficie, los dos tienen a por altura y x por base, otros dos la misma altura a con la base y, y los dos últimos y por base y x por altura; será toda la superficie del paralelepípedo $2ax+2ay+2xy=cc$. La solidez axy que ha de ser un máxîmo, tendrá igual á cero su diferencial, ó $axdy+aydx=o$, y $dx=-\frac{xdy}{y}$. Este valor sustituido en la ecuacion anterior diferenciada $o=2adx+2ady+2xdy+2ydx$, la reduce á $x=y$, lo que muestra que la base debe ser un cuadrado: y si en $cc=2ax+2ay+2xy$ ponemos x en lugar de y, sacarémos $x=-a\pm\sqrt{(aa+\frac{1}{2}cc)}$, cuyo valor positivo es el lado del paralelepípedo: el negativo no pertenece á esta cuestion.

Reducido ya el sólido á axx, averiguarémos su altura en el caso de haber de tener la mayor solidez, igualando á cero su diferencial, así; $2axdx+xxda=o$, y sustituyendo $da=-\frac{2adx}{x}$ que de ella se saca, en la ecuacion $4xa+2xx=cc$ despues de diferenciada, ó en $4adx+4xda+4xdx=o$; pues resulta $x=a$: de consiguiente *el paralelepipedo que buscamos, debe ser un cubo cuyo lado es la raiz cuadrada de la sesta parte de la superficie.*

Con efecto, si se pone x en lugar de a en la ecuacion $4ax+2xx=cc$, rasulta $x=\sqrt{\frac{1}{6}cc}$.

494 6.° *Hallar las dimensiones de una medida cilindrica, tal que con la menor superficie interior posible quepa en ella cierta cantidad de agua, trigo &c.* Si llamamos x el diámetro AB (fig. 176) de su base, y su altura AD, s su cabida, y $1:c$ la razon del diámetro á la circunferencia; será cx la periféria de la base, $cx\times y$ la superficie interior lateral, y $cx\times\frac{1}{4}x=\frac{1}{4}cxx$ la de la base: de consiguiente la solidez ó cabida $s=\frac{1}{4}cxx\times y=\frac{1}{4}cyxx$. De aquí se saca la superficie interior $cxy=\frac{4s}{x}$: luego si se le junta la de la base $\frac{1}{4}cxx$, será la total $\frac{4s}{x}+\frac{cxx}{4}$: de cuya diferencial igualada á cero $-\frac{4sdx}{xx}+\frac{cxdx}{2}=0$, se saca $x=\sqrt[3]{\frac{8s}{c}}=2\sqrt[3]{\frac{s}{c}}$. En ella se encuentra tambien $cx^3=8s$, y si se parte esta ecuacion por........ $\frac{1}{4}cyxx=s$, ó $cyxx=4s$ que sacamos antes, resultará $\frac{x}{y}=2$, y $x=2y$: luego *la medida será como se pide, si fuese el diámetro de su base duplo de su altura.*

495 7.° *Determinar el cono de mayor solidez, entre los que tienen una misma superficie conocida s.* Sea x el radio AC (fig.

177), y el lado AB, y $1:c$ la razon del diámetro á la circunferencia: será la de la base $2cx$, su area cxx, y la superficie convexa del cono cxy (221). Será pues, la superficie total $cxx+cxy=s$, $y=\frac{s}{cx}-x$, y la altura CB$=\sqrt{((AB)^2-(AC)^2)}=\sqrt{(\frac{ss}{ccxx}-\frac{2s}{c})}$: multiplíquese este valor por $\frac{1}{3}cxx$ tercio de la area de la base, y el producto $\frac{cxx}{3}\times\sqrt{(\frac{ss}{ccxx}-\frac{2s}{c})}$ será la espresion de la solidez del cono (239). Siendo esta un máximo, lo será tambien su cuadrado $\frac{1}{9}ssxx-\frac{2}{9}csx^4$: luego su diferencial $\frac{2}{9}ssxdx-\frac{8}{9}x^3csdx=0$, y $4cxx=s$, $x=\sqrt{\frac{s}{4c}}$. Si en la ecuacion $y=\frac{s}{cx}-x$ ponemos $4cxx$ valor de s; resultará $y=3x$: y *el cono cuyo lado sea triplo del semidiametro de la base, será el que se pide.*

De las evolutas, y radios osculadores de las curvas

496 Si un hilo aplicado á la curva BECG (fig. 178) y á su tangente SB en B si la hubiese, se desenvuelve teniendo su estremo fijo en G, y llevándole siempre tirante; trazará el otro estremo S una curva SHM de la cual se llama *evoluta* la curva BECG, y las rec-

tas SB, HE, MC *radios de la evoluta*. De consiguiente 1.° cada radio CM es igual á la porcion CEB del arco evoluto; y á la parte constante SB de tangente si la hay, y se diferenciará del inmediato EH en la porcion de curva EC infinitamente pequeña. 2.° Cada radio se puede considerar como la prolongacion de uno de los infinitos lados que componen la curva (473), y por lo mismo será tangente suya.

497 3.° La curva SHM puede considerarse formada de pequeños arcos circulares SH, HM, &c. descritos con diferentes radios EN, CM &c. perpendiculares á dichos arcos que se llaman *radios del circulo osculador ó de la evoluta*: y la BECG será el *lugar geométrico* de todos los centros de los circulos que besan la SHM.

498 4.° Pues que los radios son tangentes de la evoluta é iguales á ella, se podrán siempre determinar los puntos de una curva tirando á los de su evoluta tangentes iguales á ella; y haciendo pasar una linea por los estremos de dichas tangentes: y así cualquier curva puede concebirse engendradada por el desenvolvimiento de otra que será su evoluta.

499 5.° Los radios de la evoluta se llaman tambien radios de *curvatura*: porque por ellos se averigua la que tiene una curva en cualquier punto: debiendo ser la misma que la del circulo correspondiente cuyo radio se co-

noce. Y como los círculos son tanto menos curvos cuanto mayores son sus radios; será tanto mayor la curvatura de la evoluta, cuanto menor sea el radio: de consiguiente, *la curvatura máxima se encontrará buscando el radio mínimo.*

500 6.° Finalmente, siempre que los radios osculadores puedan ser espresados por ecuaciones finitas; las evolutas que pasan por el estremo de estos radios, podrán ser representadas por líneas rectas.

502 Conocida la naturaleza de una curva; veamos 1.° cómo se determina el valor del radio de la evoluta para cada uno de sus puntos: y 2° cómo se encuentra la ecuacion de su evoluta. Para averiguar 1.° el valor del radio CM=R en la curva SHM, suponiendo sus ordenadas perpendiculares al ege SD; tírensele las dos PM, *pm* infinitamente próxîmas, por C y M la CA y M*r* paralelas al mismo ege, y los dos radios CM, C*m* infinitamente próxîmos y perpendiculares al arco infinitamente pequeño M*m*, que por lo mismo concurrirán en un punto C. Sea $MA=u$, $PM=y$; será $AQ=Pp=Mr=dx$, $mr=dy=du$, y $Mm=\surd(dx^2+dy^2)$ que llamaremos ds: y en los triángulos semejantes M*mr*, MAC, tendremos $Mr\ (dx)$: $Mm(ds)::MA(u):MC=R=\frac{uds}{dx}$.

Y pues que cuando AM aumenta de *rm*

pasando á ser Qm, la CM que es entonces Cm, no varía; será su diferencial cero: luego $d(R=\frac{uds}{dx})=\frac{udxdds+dxduds-udsddx}{dx^2}=0$, y multiplicando por dx^2 y poniendo dy en lugar de du; $udxdds+dxdyds-udsddx=0$: de donde se saca $u=\frac{dsdydx}{dsddx-dxdds}$. Será pues, $R=\frac{uds}{dx}=\frac{dyds^2}{dsddx-dxdds}$, donde poniendo por ds^2, dx^2+dy^2; y por dds, $\frac{dxddx+dyddy}{(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}$; resulta despues de multiplicar por $(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}$ numerador y denominador y reducir, $R=\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dyddx-dxddy}=\frac{ds^3}{dyddx-dxddy}$: espresion del radio de curvatura, que suponiendo ds constante, se reduce á $R=\frac{dsdy}{ddx}$: suponiendo dy constante es $R=\frac{ds^3}{dyddx}$: y finalmente, suponiendo como se acostumbra, dx constante, es $R=\frac{ds^3}{-dxddy}=\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}=\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{-dxddy}$.

502 Si las ordenadas no son perpendiculares sino que salen de un punto P (fig. 207); tiradas las PM, pm infinitamente próxîmas, las perpendiculares CA, Ca, y descrito des-

de P el arco Mr: llamando PM, y; MA, z; Mr, dx; será $mr = dy$, $Mm = dx^2 + dy^2$, y en los triángulos semejantes MAC, mMr tendré Mr (dx) : mr (dy) :: AM (z) : AC $= \frac{zdy}{dx} = Ca$, por ser infinitamente pequeña la diferencia Ao de CA y Ca. Tambien $ao = \frac{zdy}{y}$ en los triángulos semejantes PMr, Cao, en los que PM : Ca :: Mr : ao : y como la diferencial de MC ó $dz = ma - MA = mr - ao = dy - ao$; será $dz = dy - \frac{zdy}{y} = \frac{ydy - zdy}{y}$.

Esto supuesto, los triángulos semejantes MAC, mMr dan Mr(dx) : M$m(\sqrt{(dx^2 + dy^2)})$ :: MA(z) : MC $= \frac{z\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx}$: cuya diferencial, tomando á dx por constante, igualada á cero como en el caso anterior, da z ó MA $= \frac{dz(dx^2 + dy^2)}{-dyddy} = \frac{(ydy - zdy)(dx^2 + dy^2)}{-ydyddy}$ poniendo por dz, $\frac{ydy - zdy}{y}$. Despéjese z, y resultará z ó MA $= \frac{y(dx^2 + dy^2)}{dx^2 + dy^2 - yddy}$: y de consiguiente CM $= \frac{y(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^3 + dxdy^2 - ydxddy}$, fórmula del radio de la evoluta cuando las ordenadas salen de un mismo punto P: la cual se reduce á la anterior (499) suponiendo $y = x$, en

cuyo caso no queda en el denominador mas término que $-dxddy$.

503 2.° La ecuacion de la evoluta se encuentra tirando (fig. 208) perpendicular al ege la CD que llamaremos z, y á la BD, u: pues será CD ó $z = AP = AM - MP = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy} - y$: y BD ó $u = AC + SP - SB = x + CA - SB$. De los triángulos semejantes MPN MAC se saca MP:PN::MA:AC ó $y : \frac{ydx}{dx} :: \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy} : AC = \frac{dy(dx^2 + dy^2)}{-dxddy}$: y como el valor de SB se encuentra suponiendo $x = o$ en la espresion del radio de la evoluta, si le representamos por a, será u ó $BA = x + \frac{dy(dx^2 + dy^2)}{-dxddy} - a$: con cuyos valores y la ecuacion á la curva, será fácil encontrar la de la evoluta.

504 *Encontremos ahora el radio de curvatura del circulo.* Diferenciada su ecuacion $y = \sqrt{(2ax - xx)}$, es $dy = \frac{adx - xdx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$: luego si tomamos á dx por constante, será $ddy = \frac{-aadx^2}{(2ax - xx)^{\frac{3}{2}}}$, $dy^2 = \frac{aadx^2 - 2axdx^2 + xxdx^2}{2ax - xx}$, ... $dx^2 + dy^2 = \frac{aadx^2}{2ax - xx}$; y $R = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$, será sustituyendo estos valores, y partiendo ambos términos por $(2ax - xx)^{\frac{3}{2}}$, ... $\frac{(aadx^2)^{\frac{3}{2}}}{aadx^3} = \frac{aadx^2\sqrt{aadx^2}}{aadx^3} = a$: es decir,

que el radio de la evoluta en el círculo es su mismo radio, de suerte que la evoluta se reducirá á un punto que es el centro.

505 *Para calcular el radio de curvatura de la parábola, elipse é hipérbola*; igualemos la fórmula de la normal $\frac{y}{dx}\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ (473, 4°) á n: y será $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\frac{ndx}{y}$, y $(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{n^3\,dx^3}{y^3}$: si este valor se sustituye en la espresion del radio, la reducirá á $R=\frac{n^3 dx^2}{-y^3 ddy}$. Si diferenciamos ahora la ecuacion general de las secciones cónicas $yy=px\pm\frac{pxx}{2a}$ (425); tendremos $2ydy=pdx\pm\frac{pxdx}{a}$, y volviendo á diferenciar tomando á dx por constante, $2yddy+2dy^2=\pm\frac{pdx^2}{2a}$, ó $yddy=\pm\frac{pdx^2}{2a}-dy^2$, y multiplicando por yy, $y^3ddy=\pm\frac{p}{2a}yydx^2-yydy^2$: póngase en esta ecuacion el valor de $yy=px\pm\frac{pxx}{2a}$, y el de $yydy^2=(\frac{pdx}{2}\pm\frac{pxdx}{2a})^2$ sacado de $2ydy=pdx\pm\frac{pxdx}{2a}$; y resultará $y^3ddy=\pm\frac{pdx^2}{2a}\times(px\pm\frac{pxx}{2a})-(\frac{pdx}{2}\pm\frac{pxdx}{2a})^2$, que se reduce

á $y^3 ddy = -\frac{ppdx^2}{4}$: luego $R = -\frac{n^3 dx^2}{-y^3 ddy} = \frac{4n^3}{pp} = \frac{n^3}{\frac{1}{4}pp}$: y *el radio de curvatura en las secciones cónicas será igual al cubo de la normal partido por el cuadrado de la mitad del parámetro*

Si se saca por la fórmula de la normal $\frac{y}{dx}\sqrt{(dx^2+dy^2)} = n$, la que corresponde á la ecuacion $yy = px \pm \frac{px^2}{2a}$, y se busca despues su valor en el vértice en donde $x=0$; se encontrará $n = \frac{1}{2}p$: de consiguiente será entonces $R = \frac{\frac{1}{8}p^3}{\frac{1}{4}pp} = \frac{1}{2}p$, y *el radio de curvatura de las secciones cónicas en el vértice será la mitad del parámetro.*

506 Busquemos ya la ecuacion de la evoluta de una de estas curvas, por eg. de la parábola, cuya ecuacion diferenciada $dy = \frac{pdx}{2\sqrt{px}}$, da $dy^2 = \frac{pdx^2}{4x}$, y $ddy = \frac{-pdx^2}{4x\sqrt{px}}$ ó $-ddy = \frac{pdx^2}{4x\sqrt{px}}$. Sustituido este valor en $MA = \frac{dx^2+dy^2}{-ddy}$, (501) suponiendo dx constante, y el de $MP = \sqrt{px}$; será CD ó $z = MA - MP = \frac{4x\sqrt{px}}{p}$, y BD ó $u = SP + AC - SB = 3x$, poniendo por AC su valor

$\frac{1}{2}p+2x$ (366 y 368), y por SB $\frac{1}{2}p$ (503): luego $x=\frac{1}{3}u$, y la ecuacion $z=\frac{4x\sqrt{px}}{p}$ se mudará en $z=\frac{4}{3}u\sqrt{\frac{pu}{3p^2}}$, de donde se saca $u^3=\frac{27}{16}pz^2$ ecuacion á la segunda parábola cúbica, que resulta de suponer en $y^{m+n}=p^m x^n$, $m=1$, $n=2$ (429), la cual será evoluta de la ordinaria, y su parámetro es $\frac{27}{16}$ del de la parábola dada.

Puntos de inflexion

507 Todo punto M (fig. 179) en el que una curva de cóncava se muda en convexa, se llama *punto de inflexion*. En ellos la TM alargada será tangente á un tiempo á los dos ramos SM, *sm*; y por lo mismo tendrá la curva dos elementos M*o*, *om* en línea recta. Los radios que á ellos se tiren perpendiculares, serán paralelos, y no se encontrarán sino á una distancia infinita. Sin embargo, habrá curvas en donde sea tan repentina la inflexion, que dichos elementos se vengan á confundir en uno lo mismo que los radios, en términos que juntandose en su mismo origen, se reduzcan á cero.

508 Luego en los puntos de inflexion debe ser cero ó infinito el radio de curvatura, esto es, $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dx\,ddy}=0$ ó $=\infty$: y dividien-

do ambos términos por dx^3, $\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{ddy}{dx^2}} = 0$ ó $= \infty$. Para esto debe ser cero ó infinito el denominador $-\frac{ddy}{dx^2}$ (440): de consiguiente para determinar los puntos de inflexîon de una curva se ha de diferenciar dos veces su ecuacion, tomando á dx por constante, y sacando en cuantidades finitas el valor de $\frac{-ddy}{dx^2}$, se igualará á cero ó al infinito, y de la ecuacion que resulta junto con la de la curva, se inferirán los valores de x, y correspondientes al punto ó puntos de la inflexion.

509 Cuando las ordenadas salen de un mismo punto, la fórmula $\frac{y(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^3+dxdy^2-ydxddy}$ ó $\frac{y\left(\frac{dx^2+dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx^2+dy^2-yddy}{dx^2}}$ es cero ó ∞; luego......... $\frac{dx^2+dy^2-yddy}{dx^2} = 0$ ó ∞. Si se supone $y = \infty$, son paralelas las ordenadas y la fórmula se reduce á $\frac{-ddy}{dx^2} = 0$ ó $= \infty$.

510 Si se hubiese de hallar el punto de inflexîon de la curva SFK (fig. 186) cuyo diámetro es Ss, y cuya ecuacion es $aax = axxy + aay$ ó $y = \frac{axx}{xx+aa}$, siendo SE, x; y

EF, y: diferencio la ecuacion, y tendré $dy=\frac{2a^3xdx}{(xx+aa)^2}$: vuelta esta á diferenciar, tomando á dx por constante, será $ddy=$............ $\frac{2a^3dx^2(xx+aa)^2-8a^3xxdx^2(xx+aa)}{(xx+aa)^4}$, que se reduce partiendo numerador y denominador por $xx+aa$, haciendo las operaciones indicadas y dividiendo despues por dx^2, á.............. $\frac{ddy}{dx^2}=\frac{2a^3xx+2a^5-8a^3xx}{(xx+aa)^3}=\frac{6a^3xx+2a^5}{(xx+aa)^3}$. Igualo á cero esta cuantidad, y me saldrá $3xx=aa$, y $x=a\sqrt{\frac{1}{3}}$: luego $y=\frac{3}{4}a$.

511 Sirva de 2.º egemplo averiguar el punto de inflexion de la curva cuya ecuacion es $y=a+(x-a)^{\frac{3}{5}}$ ó $dy=\frac{3}{5}(x-a)^{-\frac{2}{3}}dx$ diferenciando: vuelta á diferenciar tomando por constante á dx, da $ddy=-\frac{6}{25}(x-a)^{-\frac{7}{5}}dx^2$, y $\frac{ddy}{dx^2}=\frac{-6}{25\sqrt[5]{(x-a)^7}}$, valor que igualado á cero produce $6=0$, que nada significa. Se igualará pues, al infinito; y será su denominador cero, lo mismo que cualquiera de sus potencias: luego $25\sqrt[5]{(x-a)^7}=0$, de donde se saca $x=a$.

Por este mismo método se averiguan los puntos de *retroceso* de las curvas, examinando en la vecindad de dichos puntos el camino que sigue la curva en ellos.

ARTICULO V

CÁLCULO INTEGRAL

512 Este cálculo, inverso del Diferencial porque busca las cuantidades por medio de sus elementos; manifiesta con la letra S la *integracion* de dichas cuantidades, que viene á ser la *suma* de sus elementos: de suerte que Sdx, $Smzdz$, muestran las *integrales* de dx, y de $mzdz$. Las cuantidades que no provienen de una diferenciacion exâcta, no pueden ser integradas: las diferenciales de senos, arcos de círculo, y demas trascendentes se integran por aproxîmacion. Llamaremos *funcion* de una cuantidad variable cualquiera espresion en donde dicha cuantidad se encuentre como quiera que sea.

De las diferenciales con una sola variable capaces de integracion exâcta

513 Pues que $ax^m dx$ es la diferencial de $\frac{ax^{m+1}}{m+1}$ (465), será esta la integral de $ax^m dx$, ó $Sax^m dx = \frac{ax^{m+1}}{m+1}$: luego *cualquier monomio se integra aumentando de 1 el esponente m de la variable, y dividiendo el resultado por el esponente aumentado y por la diferencial.* De

suerte que la integral de $azdz$, ó S$azdz$ es $\frac{az^{1+1}dz}{(1+1)dz}=\frac{az^2}{2}$: la de $12x^2dx$ ó S $12x^2dx$ es $\frac{12x^{2+1}dx}{(2+1)dx}=4x^3$: y en general S $\frac{ax^{m-1}dx}{b}=\ldots$ $\frac{ax^{m-1+1}dx}{b(m-1+1)dx}=\frac{ax^m}{mb}$. Efectivamente, si se diferencian $\frac{az^2}{2}$, $4x^3$, y $\frac{ax^m}{mb}$; resulta $azdz$, $12x^2dx$ y $\frac{ax^{m-1}dx}{b}$.

514 Siendo $dx=x^0dx$, será S$dx=$ $\frac{x^{0+1}dx}{(0+1)dx}=x$: S$adx=\frac{ax^{0+1}dx}{(0+1)dx}=ax$: S$adx\times\sqrt[3]{x}=$ S$adx\times x^{\frac{1}{3}}=$ S$ax^{\frac{1}{3}}dx=\frac{ax^{\frac{1}{3}+1}dx}{(\frac{1}{3}+1)dx}=\ldots\ldots$ $\frac{3ax^{\frac{4}{3}}}{4}=\frac{3a}{4}\sqrt[3]{x^4}$. Del mismo modo se aplica la regla general á otros cualesquiera monomios, tengan ó no radicales. Pero falla cuando el esponente de la variable es -1: pues integrando $x^{-1}dx$, resulta $\frac{x^{-1+1}dx}{(-1+1)dx}=\frac{x^0}{0},\ldots$ cuantidad infinita: pero como sabemos (474) que $dx=\frac{dy}{y}$ es la diferencial del logarítmo hiperbólico de x; será su integral lx, ó S$x^{-1}dx$ $=lx$: y S $\frac{dx}{x}=$S-$x^{-1}dx=$-$lx=l\frac{1}{x}$; pues $dl\frac{1}{x}$ es $-\frac{dx}{x}$: y se deberán integrar por los logarít-

mos todos los casos que ocurran de esta naturaleza.

Modo de integrar por la regla general las cuantidades complexâs de una sola variable

515 Cuando estas cuantidades no están en el denominador ni incluyen potencias de cuantidades complexâs, se integran exâctamente integrando cada término por sí: $Scx^2dx + \frac{bdx}{a} - cx^3dx + \frac{bdx}{x^3}$ ó $bdx^{-3}dx$, es $\frac{cx^3}{3} + \frac{bx}{a} - \frac{cx^4}{4} - \frac{bx^{-2}}{2}$ ó $-\frac{b}{2x^2}$. Tambien admiten integracion exâcta aun cuando incluyen potencias complexâs, como no estén en el denominador, y su esponente sea un número entero y positivo; pues subidas á las potencias, se integra despues cada término por sí: por eg. $Sdx(a + cx^4)^2$ que equivale á $S(aadx + 2acx^4dx + ccx^8dx)$, es $aax + \ldots \frac{2acx^5}{5} + \frac{ccx^9}{9}$. En $Sadx(b + x^n)^3(c + x^m)^4$ se hacen las operaciones indicadas, y se integran despues los términos que resulten.

516 Podrá no obstante ser integrada por la regla general cualquiera cuantidad complexâ elevada á una potencia negativa ó fraccionaria, si está multiplicada por la diferencial de la cuantidad que se ha de elevar, prescin-

diendo de las constantes que la multiplican ó la parten. Así sucede á $kdx\,(a+bx)^m$, en donde kdx es la diferencial de $a+bx$ multiplicada por $\frac{k}{b}$: y por eso considerando á $a+bx$ como una sola variable, será $Skdx\,(a+bx)^m = \frac{k.dx(a+bx)^{m+1}}{(m+1)d(a+bx)} = \frac{k(a+bx)^{m+1}}{b(m+1)}$. Tambien es integrable $\frac{aadx+2axdx}{\sqrt{(ax+xx)}} = (aadx+2axdx)(ax+xx)^{-\frac{1}{2}}$, por ser $aadx+2axdx$ la diferencial de $ax+xx$ multiplicada por a: y así $S\,(aadx+2axdx)\,(ax+xx)^{-\frac{1}{2}} = \frac{(aadx+2axdx)\,(ax+xx)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(adx+2xdx)} = 2a(ax+xx)^{\frac{1}{2}}$.

517 Luego generalmente, cualquiera diferencial binomia de esta forma $kx^m dx\,(a+bx^n)^p$ podrá ser integrada exâctamente 1.º cuando el número p es entero y positivo, sean m y n los que quieran. 2.º Cuando el esponente de la variable x que está fuera del paréntesis, es menor en 1 que el esponente de la otra x: es decir, que se podrá integrar la cuantidad $kx^{n-1}\,dx\,(a+bx^n)p$, sean n y p los números que se quieran; pues en tal caso será $kx^{n-1}\,dx$ diferencial de $a+bx^n$ multiplicada por $\frac{k}{nb}$: luego &c. (516).

518 3.º Cuando dividiendo el esponente m de la primera x aumentado de 1, por el

esponente n de la segunda, resulta un número entero y positivo de cociente; como sucede á la cuantidad $kx^3dx\,(a+bx^2)^{\frac{1}{5}}$, donde el cociente de $3+1$ partido por 2, es 2. Para integrarla supongo $a+bx^2=z$, y será $x^2=\frac{z-a}{b}$: y pues que x^3dx que precede al binomio, dejando á parte las constantes, resulta de diferenciar x^4 cuadrado de x^2; cuadraré la ecuacion $x^2=\frac{z-a}{b}$, y diferenciando el resultado $x^4=(\frac{z-a}{b})^2$; saldrá $4x^3dx=2\,(\frac{z-a}{b})\times\frac{dz}{b}$: ó $x^3dx=(\frac{z-a}{b})\times\frac{dz}{2b}$. Si pongo ahora en la cuantidad dada en lugar de x^3dx, y $a+bx^2$ sus valores en z, tendré $k\,(\frac{z-a}{2bb})\,dz\times z^{\frac{1}{5}}$ ó.............. $\frac{kz^{\frac{1}{5}+1}dz}{2bb}-\frac{kaz^{\frac{1}{5}}dz}{2bb}$: cuya integral es.............. $\frac{kz^{\frac{1}{5}+2}}{(\frac{1}{5}+2)2bb}-\frac{kaz^{\frac{1}{5}+1}}{(\frac{1}{5}+1)2bb}$: ó por ser $\frac{kz^{\frac{1}{5}+1}}{2bb}$........ multiplicador comun,.....$\frac{kz^{\frac{1}{5}+1}}{2bb}\Big(\frac{z}{\frac{1}{5}+2}-$..... $\frac{a}{\frac{1}{5}+1}\Big)=\frac{kz^{\frac{1}{5}+1}}{2bb}\big(\frac{5}{11}z-\frac{5}{6}a\big)$: sustituyo en lugar de z su valor; y saldrá por último, $Skx^3dx\,(a+bx^2)^{\frac{1}{5}}=\frac{k}{2bb}\big(\,(a+bx^2)^{\frac{1}{5}+1}\times$

$\frac{5}{7}(a+bxx)-\frac{5}{9}a$)), que es la integral que se busca.

519 Si el binomio no tuviese la dicha condicion, podrá las mas veces reducirse á otro igual que la tenga, dividiendo sus dos términos por la potencia de x que encierra, y multiplicando la cuantidad de afuera para compensar esta division, por dicha potencia de x elevada al grado que indica el esponente total del binomio. Por egemplo, para integrar $\frac{aadx}{(aa+xx)^{\frac{3}{2}}} = aa\,x^0\,dx\,(aa+xx)^{-\frac{3}{2}}$, donde $0+1$ no es divisible por 2, partiré por x^2 el binomio, y multiplicaré por $(x^2)^{-\frac{3}{2}} = x^{-3}$ la cuantidad de afuera, y tendré $aax^{-3}dx(aax^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}}$; espresion integrable por dividir exâctamente -2 á $-3+1=-2$. Supongo pues, $aax^{-2}+1 = z$, y será $x^{-2} = \frac{z-1}{aa}$: y como $x^{-3}dx$ es la diferencial de x^{-2} sin las constantes, diferenciaré $x^{-2} = \frac{z-1}{aa}$, y saldrá $-2x^{-3}dx = \frac{dz}{aa}$, y $x^{-3}dx = -\frac{dz}{2aa}$: luego sustituyendo, será $aax^{-3}\,dx\,(aa^{-2}+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{aa \times dz}{2aa} \times z^{-\frac{3}{2}} = \ldots\ldots$ $\frac{-z^{-\frac{3}{2}}dz}{2}$, cuya integral es $\frac{-z^{1-\frac{3}{2}}}{2(1-\frac{3}{2})} = z^{-\frac{1}{2}}$. Pongo por z su valor, y tendré $Saax^3dx$

$(aax^{-2}+1)^{-\frac{2}{2}}=(aax^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{(aax^{-2}+1)}}=$ $\frac{x}{\sqrt{(aa+xx)}}$. Cuando hay en los dos términos del binomio potencias de x, se practica lo mismo dividiendo por una de ellas. Las cuantidades trinomias, cuadrinomias &c. á escepcion de algun otro caso estraordinario, solo en los esplicados (515 *y sig.*) admiten integracion exâcta.

520 Fuera de los casos mencionados en que las diferenciales binomias admiten integracion exâcta, se acude á las series para conseguirla á lo menos próxîma. Si se reduce por eg. el binomio de la cuantidad $2adx\ (a^2-x^2)^{-1}$ á la serie convergente $\frac{1}{a^2}+\frac{x^2}{a^4}+\frac{x^4}{a^6}+\frac{x^6}{a^8}+$ &c. (447), será $2adx$ $(a^2-x^2)^{-1}=2(\frac{dx}{a}+\frac{x^2dx}{a^3}+\frac{x^4dx}{a^5}+\frac{x^6dx}{a^7}+\text{\&c.})$ é integrando cada término por sí, $S2aax$ $(a^2-x^2)^{-1}=2(\frac{x}{a}+\frac{x^3}{3a^3}+\frac{x^5}{5a^5}+\frac{x^7}{7a^7}+$ &c.)

Integracion de las diferenciales con dos ó mas variables

521 Pues que $d(xy)$ es $ydx+xdy$ (464); será $S(ydx+xdy)=xy$. En $S(ydx+xdy+bdz)$, sacada la integral xy de $ydx+xdy$, y restada su diferencial de $ydx+xdy+bdz$, saldrá de re-

siduo bdz, cuya integral bz añadida á xy, dará $xy+bz=S(ydx+xdy+bdz)$. Del mismo modo se integra la cuantidad $ydx+xdy+bdy$, tomando la integral de los dos términos $xdy+bdy$ que es $xy+by$: pues $d(xy+by)=ydx+xdy+bdy$. Luego para integrar una diferencial con muchas variables, cuando es posible, *se deben integrar los términos afectados de una misma variable, mirando las otras como constantes; se diferencia despues el resultado contando con todas las variables que encierra, y se resta lo que salga, de la cuantidad propuesta. Si nada queda, se tendrá la integral que se busca: y si queda, se tomará su integral, que se añadirá á la anterior, continuando asi hasta conseguirla completa.*

En virtud de esta regla se hallará que $S(ny^m x^{m-1}dx+mx^n y^{m-1}dy)=x^n y^m$: $S\frac{ydx-xdy}{y^2}=S(y^{-1}dx-xy^{-2}dy)=\frac{x}{y}$: $S\left(\frac{nx^{n-1}ydx-amx^n dy}{y^{m+1}}\right)=\frac{ax^n}{y^m}$: y $S(x^3dy+3x^2ydx+x^2dz+2xzdx+xdx+y^2dy)=x^3y+x^2z+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}y^3$ &c.

522 Para conocer si una diferencial de muchas variables es ó no integrable; sea X la integral de la diferencial $Pdx+Qdy$ de dos variables, en la que P y Q son funciones de x, y: representemos por $d(\overset{y}{X})$,

$d\overset{y}{(X)}$ las diferenciales de X haciendo variar en la primera espresion á x y en la segunda á y: y por $d\,(\overset{x}{\underset{y}{X}})$ la diferencial de X haciendo primero variar á x, y despues á y. Es claro que $Pdx = d\overset{x}{(X)}$, y $Qdy = d\overset{y}{(X)}$: y que haciendo variar la cuantidad y que contiene P, y la cuantidad x que contiene Q; será $d\overset{y}{(P)}dx = d\,(\overset{x}{\underset{y}{X}})$, y $d\,\overset{x}{(Q)}dy = d\,(\overset{y}{\underset{x}{X}})$. La diferencial de X que se encuentra, variando primero x y despues y, debe ser igual á la diferencial de X que resulta variando primero y, y despues x: luego $d\,(\overset{x}{\underset{y}{X}}) = d\,(\overset{y}{\underset{x}{X}})$: de consiguiente $d\overset{y}{(P)}dx = d\,\overset{x}{(Q)}\,dy$, y $\frac{d\overset{y}{(P)}}{dy} = d\frac{\overset{x}{(Q)}}{dx}$.

De donde se infiere que *si una diferencial* $Pdx + Qdy$ *de dos variables es integrable, la diferencial de* P *variando á* y, *dividida por* dy; *debe ser igual á la diferencial de* Q *variando á* x, *dividida por* dx. Así se ve en la diferencial $ydx + xdy$, en la que $P = y$, $Q = x$; pues $\frac{d\overset{y}{(P)}}{dy} = \frac{dy}{dy} = 1$, y $\frac{d\overset{x}{(Q)}}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$; prueba de que dicha diferencial es integrable.

523 Sea ahora X la integral de una diferencial $Pdx+Qdy+Rdz$ de tres variables: suponiendo constante á z, se tiene $dz=o$, y de consiguiente $dX=Pdx+Qdy$, ecuacion en la que $\frac{\overset{y}{d}(Q)}{dy}=\frac{\overset{x}{d}(Q)}{dx}$. Si se toma á y por constante, $dy=o$, $d(X)=Pdx+Rdz$, y $\frac{\overset{x}{d}(P)}{dx}=\frac{\overset{z}{d}(R)}{dx}$. Haciendo constante á x, $dx=o$, $dX=Qdy+Rdz$, y $\frac{\overset{z}{d}(Q)}{dz}=\frac{\overset{y}{d}(R)}{dy}$. Luego cuando una diferencial $Pdx+Qdy+Rdz$ de tres variables admite integracion exâcta, ha de tener idénticas las tres ecuaciones $\frac{\overset{x}{d}(P)}{dy}=\frac{\overset{x}{d}(Q)}{dx}$, $\frac{\overset{z}{d}(P)}{dz}=\frac{\overset{x}{d}(R)}{dx}$, $\frac{\overset{z}{d}(Q)}{dz}=\frac{\overset{y}{d}(R)}{dy}$. Por el mismo método se encuentran las que son necesarias para diferenciales de mayor número de variables.

Integracion de las diferenciales segundas, terceras &c.

524 Por lo que dejamos dicho (467), una diferencia primera es la integral de su se-

gunda: y esta lo es de su tercera, y así de las demas: por lo mismo las diferencias segundas, terceras &c. se deben integrar por las mismas reglas que las primeras: de suerte que $Sddx = dx$, $Sdxddx = \frac{1}{2}dx^2$.

Si se hubiese de integrar la diferencial segunda $x^n ddx + nx^{n-1}dx^2$, que tiene dos variables; suponiendo dx constante, se reducirá á $x^n ddx$, cuya integral es $x^n dx$; diferencio esta integral haciendo variar á x y dx; y será $d(x^n dx) = x^n ddx + nx^{n-1}dx^2$, que es justamente la diferencial propuesta: luego $S(x^n ddx + nx^{n-1} dx) = x^n dx$.

525 Á muchas de las mencionadas integrales faltan las constantes que se despreciaron en su diferenciacion (463): y para determinarlas *hay que igualar á cero la variable x de la integral sacada; y lo que resulte mudándole los signos, será la constante*: cuando sale cero es señal que no hay constantes que añadir á la integral hallada.

Dejando para despues la aplicacion de esta regla, la demostraremos suponiendo que sea Q una integral incompleta cuando x vale a, y que siendo P la integral incompleta que da el cálculo, haya de completarse con la constante ó constantes C que no conocemos. Si sustituyendo en P a en lugar de x, resulta A, será A+C la integral completa en el caso de $x = a$; y tendremos Q = A+C. Pero como Q nos es por lo comun incógnito, le supone-

mos cero para descubrir el valor de C: pues siendo entonces $o=A+C$, ó $C=-A$; será la constante lo que resulte de suponer $x=o$, tomado con signos contrarios.

526 De consiguiente, si la integral es cero, no cuando $x=o$, sino cuando tiene un valor determinado a; será entonces la constante la misma integral que da el cálculo, poniendo en ella a en lugar de x. Pues que $Sx^2dx=\frac{x^3}{3}$ es $\frac{a^3}{3}$ cuando $x=a$; será $Q=\frac{a^3}{3}+C$, y como suponemos $Q=o$, tendremos $o=-\frac{a^3}{3}+C$, $C=-\frac{a^3}{3}$, y la integral completa $Q=\frac{x^3-a^3}{3}$. Si $S(-x^ndx)=-\frac{x^{n+1}}{n+1}$ es cero cuando $x=a$; será $\frac{-a^{n+1}}{n+1}+C=o$, $C=\frac{a^{n+1}}{n+1}$, y la integral completa $Q=\frac{a^{n+1}-x^{n+1}}{n+1}$. Finalmente, si $Sxdx(c^3+bx^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{(c^3+bx^2)^{\frac{3}{2}}}{3b}$ fuese cero cuando $x=a$; sería $\frac{(c^3+ba^2)^{\frac{3}{2}}}{3b}+C=o$, $C=-\frac{(c^3+ba^2)^{\frac{3}{2}}}{3b}$; y $Q=\frac{(c^3+bx^2)^{\frac{3}{2}}-(c^3+ba^2)^{\frac{3}{2}}}{3b}$.

Integracion de las diferenciales que llevan senos y cosenos, y de las esponenciales.

527 Pues que demostramos (469 *y sig.*) que $d(sen\ z) = dz\ cos\ z, d(cos\ z) = -dz\ sen\ z$; será la integral de $dz\ cos\ z$, $sen\ z$, ó $sen\ z + C$: $S - dzsenz = cos\ z + C$. Para integrar $dzcos\ 3z$, se escribirá así, $\frac{3dz\ cos\ 3z}{3}$: y será su integral $\frac{sen\ 3z}{3} + C$: $dz\ sen\ 3z$ se transforma en $\frac{-3dz\ sen\ 3z}{-3}$, y es su integral $\frac{cos\ 3z}{-3} + C$: en general, $Sdz\ sen\ mz = S\frac{-mdz\ sen\ mz}{-m} = -\frac{cos\ mz}{m} + C$.

Si fuese la diferencial $(sen\ z)^n\ dz\ cos\ z$ que viene á ser $(sen\ z)^n d(sen\ z)$; se integrará por la regla general así; $\frac{(sen\ z)^{n+1}}{n+1} + C$. $S(sen\ mz)^n dz\ cos\ mz = S\left(\frac{sen\ mz^n mdz\ cos\ mz}{m}\right) = S\frac{sen\ mz^n . d\ (sen\ mz)}{m}$, es $\frac{(sen\ mz^{n+1}}{m(n+1)} + C$: y $Sm(cos\ mz)^n dz\ sen\ mz = Sm\frac{(cos\ mz)^n \times mdz\ sen\ mz}{-m}$ es $\frac{(cos\ mz)^{n+1}}{-m(n+1)} + C$.

528 *La integral de las diferenciales esponenciales debe ser la misma diferencial di-*

vidida *por la diferencial de su logaritmo*: regla opuesta á la que dimos (473) para diferenciarlas: porque si la diferencial de c^x es $c^x dx$ (474), será $Sc^x dx = c^x$: asímismo. . . $Sx^z dzlx + x^{z-1}zdx$ es x^z; porque siendo. . . $dzlx + \frac{zdx}{x}$ la diferencial del logarítmo x^z, si divido por ella $x^z dzlx + x^{z-1}zdx = x^z dzlx + \frac{x^z zdx}{x}$; tendré de cociente x^z.

Integracion de las cuantidades logarítmicas

529 Para integrar $\frac{dx}{xlx}$, haremos $lx = y$, y será (472) $\frac{dx}{x} = dy$, $\frac{dx}{xlx} = \frac{dy}{y}$: y como $S\frac{dy}{y}$ es ly (514); si ponemos por y su valor, tendremos $S\frac{dx}{xlx} = l\,lx$. En $m(lx)^{m-1}\frac{dx}{x}$, suponiendo $lx = y$, sacaremos $\frac{dx}{x} = dy$ $lx)^{m-1} = y^{m-1}$: luego $Sm(lx)^{m-1}\frac{dx}{x} = Smy^{m-1}dy$, será y^m ó $l(x)^m$, poniendo por y, lx. $S\frac{dx}{a+x} = \ldots$ $l(a+x)$ ó $l(a+x)+C$: $S\frac{2xdx}{a^2+x^2} = l(a^2+x^2)+C$.

En general, *cuando el numerador de un quebrado es la diferencial del denominador, la integral es el logaritmo del denominador.*

530 A veces es menester multiplicar ó partir los dos términos del quebrado por cuantidades constantes, para que el numerador quede diferencial cabal del denominador: en cuyo caso será su integral el logarítmo del denominador partido ó multiplicado por las constantes. Sirva de egemplo $\frac{ax^2dx}{a^3+x^3}$, á la que por ser $3x^2dx$ diferencial de a^3+x^3, la daré esta forma $\frac{a}{3}\times\frac{3x^2dx}{a^3+x^3}$: y será su integral $\frac{a}{3}l(a^3+x^3)+C$. Tambien $S\frac{dx}{a-x}=S\frac{1}{-1}\times\frac{-1dx}{a-x}=-1\, l(a-x)+C=l(a-x)^{-1}+C=l\left(\frac{1}{a-x}\right)+C$. $S\frac{xdx}{aa+xx}=S\frac{1}{2}\times\frac{2xdx}{aa+xx}=\frac{1}{2}l(aa+xx)+C=l(\sqrt{(aa+xx)})+C$. $S\frac{ax^{n-1}dx}{k+bx^n}=S\frac{a}{bn}\times$............ $\frac{bnx^{n-1}dx}{k+bx^n}=\frac{a}{bn}l(k+bx^n)+C=l(k+bx^n)^{\frac{a}{bn}}+C$.

531 Hay cuantidades que no admiten esta preparacion, en las que es preciso multiplicar por una funcion de x, tal que el producto sea la diferencial de dicha funcion; pues dividiendo despues por el resultado, quedará reducida la diferencial á logarítmica. Si se multiplica $\frac{dx}{\sqrt{(xx-1)}}$ por $x+\sqrt{(xx-1)}$, el producto $\frac{xdx}{\sqrt{(xx-1)}}+dx$ es justamente la di-

ferencial del multiplicador $x+\sqrt{(xx-1)}$: luego $S\frac{dx}{\sqrt{(xx-1)}}=S\frac{dx+\frac{xdx}{\sqrt{(xx-1)}}}{x+\sqrt{(xx-1)}}=l(x+$ $\sqrt{(xx-1)})+C$. Tambien sacarémos la integral de $\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, multiplicando ambos términos por $\sqrt{-1}$: pues resulta $\frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{(xx-1)}}$, cuya integral es $\sqrt{-1}\times l(x+\sqrt{(xx-1)})+C$ en virtud de lo dicho. De consiguiente, la integral de $\frac{dx}{\sqrt{(xx\pm aa)}}$ es $l(x\pm\sqrt{(xx\pm aa)})$, como se puede verificar diferenciando esta cantidad (472)

Integrales que se refieren al círculo

532 Sea SM$=s$ (fig 181) el arco de un círculo cuyo diámetro es a; SP, x; PM, y: tírense la pm infinitamente próxima á PM, y la Mr paralela á SC: y será Pp=Mr=dx, Mm=ds, PM$=\sqrt{(2ax-xx)}$ (350): y en los triángulos semejantes CPM, Mrm, se tendrá PM: CM:: Mr: Mm, ó $\sqrt{(2ax-xx)}:\frac{1}{2}a:dx:$ $ds=\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(2ax-xx)}}$, elemento del arco SM: y $S\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(2ax-xx)}}$ será el valor de dicho arco. Para averiguar el valor de esta integral cuando x tiene un valor determinado; se restará este

de $SC = \frac{1}{2}a$, para conocer CP, y con él y la hipotenusa $CM = \frac{1}{2}a$, se calculará en el triángulo rectángulo CPM el ángulo SCM (285): con el cual y el radio CM será facil hallar la longitud del arco SM (167), que es el valor de la integral propuesta.

Para reducir á ella $\frac{hdx}{\sqrt{(gkx - xx)}}$, siendo h, g, k, p cuantidades conocidas; se dividirán numerador y denominador por $\sqrt{p}$: y como en $\frac{\frac{h}{\sqrt{p}}dx}{\sqrt{(\frac{gk}{p}x - xx)}}$ ó $\frac{h}{\sqrt{p}} \times \frac{dx}{\sqrt{(\frac{gk}{p}x - xx)}}$ que resulta, ha de multiplicar á dx la mitad de $\frac{gk}{p}$ multiplicador de x, para que sea semejante á la anterior diferencial; multiplicaré y dividiré á un mismo tiempo por $\frac{1}{2}(\frac{gk}{p})$, y tendré $\frac{2ph}{gk\sqrt{p}} \times \frac{\frac{gk}{2p}dx}{\sqrt{(\frac{gk}{p}x - xx)}}$: diferencial que representa un arco de círculo cuyo diámetro es $\frac{gk}{p}$ y la abscisa x, multiplicado por $\frac{2ph}{gk\sqrt{p}}$, que se determinará como la otra.

533 Contando las abscisas desde C, y siendo CS, b; CP, x; sale $\frac{-bdx}{\sqrt{(bb-xx)}}$ por

elemento del arco SM, comparando los triángulos semejantes CPM, Mmr, y teniendo presente que PM$=\sqrt{(bb-xx)}$: y pues que SM mengua al paso que CP ó x crece, deberá ser la diferencial negativa (463).

Reducirémos á ella $\frac{kdx}{\sqrt{(gh-pxx)}}$, trasformándola como antes en $\frac{k}{\sqrt{p}}\times\frac{dx}{\sqrt{(\frac{gh}{p}-xx)}}$: y como aquí $\frac{gh}{p}$ sustituye por bb, la cantidad $-b$ que ha de acompañar á dx, es $-\sqrt{\frac{gh}{p}}$: de suerte que tendrémos $\frac{\frac{k}{\sqrt{p}}}{-\sqrt{\frac{gh}{p}}}\times\frac{-\sqrt{\frac{gh}{p}}\times dx}{\sqrt{(\frac{gh}{p}-xx)}}$: y suponiendo CS$=\sqrt{\frac{gh}{p}}$, y CP, x; será la integral $\frac{\frac{k}{\sqrt{p}}}{\sqrt{-\frac{gh}{p}}}\times$ SM ó $-\frac{k}{\sqrt{gh}}\times$ SM$+$C.

534 Si se tira la tangente SN, la secante CN, la Cn infinitamente próxîma á CN, y se traza desde C con el radio CN el arco infinitamente pequeño Nt que será perpendicular á CN y Cn; los triángulos semejantes CM$'m$, CtN darán CN:CM::tN: M m: de los CSN, tNn tambien semejantes, se saca CN:CS::Nn:

tN: y de consiguiente $(CN)^2$: $CM' \times CS$:: $tN \times Nn$: $tN \times M'm'$:: Nn: $M'm'$: ó llamando CS, a; la tangente SN, x; y s el arco SM', $aa+xx$: aa::dx:$ds = \frac{aadx}{aa+xx}$, espresion del elemento de un arco cuyo radio es a, y x su tangente: luego si ademas del radio que se conoce, se averigua el ángulo SCN en el triángulo rectángulo SCM; se podrá determinar la longitud del arco para cada valor de x.

Para reducir á dicha espresion la diferencial $\frac{kdx}{gbb+hxx}$; puesta así, $\frac{k}{h} \times \frac{dx}{\frac{gbb}{h}+xx}$; se multiplicarán sus dos términos por $\frac{gbb}{h}$: y pues que resulta $\frac{k}{gbb} \times \frac{\frac{gbb}{h}dx}{\frac{gbb}{h}+xx}$; será la integral el producto del arco cuya tangente es x y el radio $\sqrt{\frac{gbb}{h}}$ multiplicado por $\frac{k}{gbb}$.

535 Espliquemos ahora un modo fácil de encontrar la longitud del arco de un ángulo dado, conocido el radio, que como hemos visto, sirve de *módulo* en todas estas integraciones. Llamemos R el radio, N el número de grados del ángulo dado y Z su longitud. Siendo el diámetro á la circunferencia ó el radio á la semicircunferencia como 1:

3,1415926535 &c. será 3,14159 &c. : 1:: 180°: R = 57°,295779951 &c. = 57°,17′, 44″=m: luego el arco de 57° 17 44′ es á la longitud del radio, como el número de grados del ángulo N es á la longitud de su arco; esto es, m:R::N: $Z=\frac{R\times N}{m}$, ó haciendo $r=\frac{1}{m}=\frac{1}{57,295779}$, $Z=N\times R\times r$.

Aplicacion de la integracion por séries á los logaritmos

536 Para encontrar el logarítmo hiperbólico del número $\frac{n+x}{n}$; sacaré su diferencial $\frac{dx}{n+x}$(471): y pues que reducido á série este quebrado es (445), $\frac{dx}{n+x}=\frac{dx}{n}-\frac{xdx}{nn}+\frac{x^2dx}{n^3}-\frac{x^3dx}{n^4}$+&c. tendremos integrando, $l\left(\frac{n+x}{n}\right)=\frac{x}{n}-\frac{x^2}{2n^2}+\frac{x^3}{3n^3}-\frac{x^4}{4n^4}$+&c. que se reduce haciendo $n=1$, á $l(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+$&c. série que ya encontramos (460): cuando x es negativa, corresponden á los términos pares signos contrarios.

537 Si el número hubiera sido $\frac{n+x}{n-x}$, cuya diferencial es $\frac{2ndx}{n^2-x^2}=2\left(\frac{dx}{n}+\frac{x^2dx}{n^3}+\right.$

$\frac{x^4 dx}{n^5} + \frac{x^6 dx}{n^7} +$ &c.); se hubiera sacado integrando, $l\left(\frac{n+x}{n-x}\right) = 2\left(\frac{x}{n} + \frac{x^3}{3n^3} + \frac{x^5}{5n^5} + \frac{x^7}{7n^7} +\right.$ &c.): que se reduce haciendo $n=1$, á $2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 +\right.$ &c.) la misma que sacamos ya (460).

538 Finalmente, si dado un logarítmo y, se pidiese el número $1+x$ que le corresponde; tendremos $y = 1+x$, $dy = \frac{dx}{1+x}$, ó $dy + xdy - dx = 0$. Si hacemos $x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 +$ &c. será $dx = Ady + 2Bydy + 3Cy^2dy + 4Dy^3dy +$ &c. y haciendo las correspondientes sustituciones saldrá.........

$$\left.\begin{matrix} dy + Aydy + By^2dy + Cy^3dy \\ -Ady - 2Bydy - 3Cy^2dy - 4Dy^3dy \end{matrix}\right\} = 0,$$

de donde sacaremos (447) $A=1$, $B=\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}$, $C=\frac{1}{3}B=\frac{1}{2.3}$, $D=\frac{1}{4}C=\frac{1}{2.3.4.}$ &c. y será el número que se busca $1+x = 1+y+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2.3}y^3 + \frac{1}{2.3.4.}y^4 +$ &c.

ARTÍCULO VI

Aplicaciones del cálculo integral

CUADRATURA DE LAS CURVAS

539 Si de los estremos M, m, (fig. 182) de uno de los infinitos lados de que podemos concebir formada una curva MSQ (102), imaginamos tiradas perpendicularmente al ege Ss las dos ordenadas MP, mp, infinitamente próxîmas, llamando MP, y; SP, x; será Pp, dx; rm, dy; pm, $y+dy$, y la superficie del trapecio PMmp(183), $\frac{1}{2}(\text{PM}+pm)\times\text{P}p=\frac{1}{2}(2y+dy)\times dx=ydx+\frac{1}{2}dxdy=ydx$, despreciando $\frac{1}{2}dxdy$ (444). Luego si poniendo en ydx el valor de y sacado de la ecuacion á la curva de que se trata, se integra despues lo que resulta; se habrá sacado la suma de todos los trapecios que componen la superficie que abraza la curva, ó su *cuadratura*. Pero como el trapecio PMmp que hemos considerado como la diferencial del espacio SMP, puede serlo tambien del espacio LHPM tomado desde un punto fijo H; pues PMmp=HmpL−HPML = d(HPML); es preciso añadir á la integral que da el cálculo una constante que muestra esta diferencia; como veremos mas claramente en los egemplos.

540 Si las ordenadas saliesen todas de un

centro comun como la SQ, Sq; se considera el ámbito de la curva dividido en una infinidad de triángulos como SQq, cuya superficie $\frac{1}{2}\times Sq\times Qt$ es, llamando SQ, y; Qt, dx; $\frac{1}{2}(y+dy)\times dx=\frac{1}{2}ydx$, despreciando $\frac{1}{2}dxdy$ (444). Cuando las ordenadas no son perpendiculares al ege, aunque sean paralelas entre sí, resulta una espresion algo diferente de las anteriores.

541 Vengamos á los egemplos, y sea el 1.° *cuadrar el triángulo* ABC (fig. 175): para esto, supongamos tiradas las dos ordenadas Mm, Nn infinitamente próximas, y llamemos a la altura CD, b la base AB, y la Mm, y CP, x; será Pp, dx: y el elemento del area $NMnm=ydx$: pongamos ahora en lugar de y, $\frac{bx}{a}$ que se saca de los triángulos semejantes ABC, CMm, donde CD : AB :: CP : Mm, ó $a:b::x:y=\frac{bx}{a}$; y tendremos $MNnm=ydx=\frac{bxdx}{a}$, cuya integral $Sydx=\frac{bxx}{2a}$ será el espacio CMm: luego el de todo el triángulo ABC en el que $x=a$, será $\frac{baa}{2a}=\frac{ba}{2}$; como lo digimos (182).

542 2.° *Para cuadrar la parábola* (fig. 182) cuya ecuacion es $y^2=px$ ó $y=\sqrt{px}=p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$; pongo este valor en ydx, y tendré $p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx$,

cuya integral $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}+C$ es el valor de la superficie de la parabola. Como en el punto S en que $x=o$, es tambien cero el espacio SMP, y la integral se reduce á $o=o+C$ en donde $C=o$; no habrá constante cuando los espacios se cuentan desde el punto S, y será $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$ el espacio indefinido SPM. Pero si se pidiese la superficie del espacio LHMP, en la suposicion de ser $SH=b$; sería $LHMP=\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}+C$; y pues que este espacio es cero cuando $SP=x=b$, en cuyo supuesto es $o=\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}+C$ (526), y $C=-\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$; será $LHMP=\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$.

La espresion $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\times x=SPM$, se reduce poniendo y en lugar de $p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$, á $\frac{2}{3}xy$, que son los dos tercios del rectángulo SPMR. Tambien el espacio LHPM= $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\times x-\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\times b=\frac{2}{3}SP\times PM-\frac{2}{3}LH\times SH$, es la diferencia entre los dos tercios de los rectángulos SPMR y SHLZ.

543 3.º *Habiendo de cuadrar el cuarto del circulo* SCD (fig. 181), supondremos el radio a, y $PM=y=\sqrt{(aa-xx)}$ (354): y será el espacio $CDMP=Sy\,dx=Sdx\sqrt{(aa-xx)}=$(154 *t* I), $Sdx\,(a-\frac{xx}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}-\frac{x^6}{16a^5}-$

$-\frac{5x^8}{128a^7}$ — &c.) donde integrando cada término por sí, resulta $CDMP = ax - \frac{x^3}{2.\ 3.\ a} - \frac{1.x^5}{2.\ 4.\ 5a^3} - \frac{1.\ 3.\ x^7}{2.\ 4.\ 6.\ 7.a^5} - \frac{1.\ 3.\ 5x^9}{2.\ 4.\ 6.\ 8.\ 9a^7} -$ &c. Si suponemos $x = a$, saldrá la superficie del cuadrante $CSD = aa - \frac{aa}{6} - \frac{aa}{40} - \frac{aa}{112} - \frac{5aa}{1152} -$ &c. $= aa\,(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} \ldots \frac{5}{1152}$ — &c. La superficie del sector CMD se saca restando de CDMP la del triángulo $CPM = PM \times \frac{1}{2}CP = \frac{1}{2}x \times \sqrt{(aa - xx)}$.

544 4.° *En la elipse* cuya ecuacion es $y = \frac{b}{a}\sqrt{(aa - xx)}$, se tiene haciendo las mismas operaciones, $Sydx = bx - \frac{bx^3}{6aa} - \frac{bx^5}{40a^4} - \frac{bx^7}{112a^6} - \frac{5bx^9}{1152a^8}$ — &c. $= \frac{b}{a}(ax - \frac{1.\ x^3}{2.\ 3.\ a} - \frac{1.\ x^5}{2.3.5a^3} - \frac{1.\ x^7}{2.4.6.7a^7}$ — &c.): la cual série tiene con la anterior del círculo la razon de b á a segun lo dejamos demostrado.

545 5.° *Para cuadrar la area hiperbólica* SMP (fig. 183) *y el sector hiperbólico* CSM; sustituirémos en ydx, $\frac{b}{a}\sqrt{(xx - aa)}$ va-

lor de y en la ecuacion de la hipérbola: y será $ydx = \frac{bdx}{a}\sqrt{(xx-aa)}$ el elemento de su superficie. El sector CSM = CPM − SPM = CP×½ PM − SPM = ½yx − Sydx, cuya diferencial ½($xdy+ydx$)−ydx=½($xdy-ydx$), se reduce á $\frac{ab}{2}\times\frac{dx}{\sqrt{(xx-aa)}}$ substituyendo $\frac{b}{a}\times\sqrt{(xx-aa)}$ y $\frac{bx\,dx}{a\sqrt{(xx-aa)}}$ en lugar de y, dy. Su integral es (531) ½$ab\times l\,(x+\sqrt{(xx-aa)})$+C: y como esta debe ser cero cuando $x=a$, de cuya suposicion resulta C = −½$ab\times la$; será la integral completa de $\frac{ab}{2}\times\frac{dx}{\sqrt{(xx-aa)}}$, ó la superficie del sector CSM=½$ab\times l(x+\sqrt{(xx-aa)})$−½$ab\times la = \frac{ab}{2}\times l\left(\frac{x+\sqrt{(xx-aa)}}{a}\right)$. Si esta se resta del triángulo CPM = ½ (CP×PM) = $\frac{bx\sqrt{(xx-aa)}}{2a}$, será el residuo $\frac{bx\sqrt{(xx-aa)}}{2a}-\frac{ab}{2}\times l\left(\frac{x+\sqrt{(xx-aa)}}{a}\right)$ el valor del espacio hiperbólico SPM.

546 6.º *Cuadremos finalmente, la hipérbola equilátera entre sus asíntotas*: cuya ecuacion (417) haciendo $aa=1$, es $xy=1$: y siendo (fig. 169) CG, x; GZ, y; $xy=1$, da $y=\frac{1}{x}$. Luego Sydx=S$\frac{dx}{x}=lx$ (514): y el area MCGZYX será lx+C.

547 Como esta es cero cuando $x=o$, y entonces se reduce á $l(o)+C=o$ donde $C=\ldots\ldots -l(o)$, será dicha superficie completa $lx-\ldots\ldots l(o)=l\frac{x}{o}$. De consiguiente si hacemos $x=\ldots CX=b$, será el espacio $MCXX'=l\frac{b}{o}$, infinito. Suponiendo $CU=1$, $aa=1$, y contando las abscisas desde U; será $CG=1+x$, $GZ=y=\frac{1}{1+x}$, $ydx=\frac{dx}{1+x}$, y $Sydx=S\frac{dx}{1+x}=l(1+x)+C=lGZ+C$. Este espacio es cero cuando $x=o$, en cuyo supuesto $l(1+o)+C=o$, y $C=-l1=o$: de suerte que dicho espacio será solamente $l(1+x)$, y serán finitos los espacios UGZY donde $CU=1$.

548 Aquí se ve que los logarítmos hiperbólicos resultan de una hipérbola equilátera cuya potencia es 1: de consiguiente siendo la potencia aa, $CU=b$, $UG=x$, $GZ=y$; hubiéramos sacado $UGZY=aa\,l(b+x)=lCU\times aa$. Supongamos ahora que sea mm la potencia de Snm, otra de las infinitas hipérbolas que se pueden trazar entre las asíntotas MC, Cc; sería por lo dicho el espacio $UGmn=mml(b+x)$, y tendriamos $UGZY:UGmn::aal(b+x):mm\times l(b+x)::aa:mm$: luego *los logarítmos de un mismo número tomados en distintas hipérbolas, son como las potencias de las mismas hipérbolas.*

Rectificacion de las curvas

549 Para encontrar la linea recta á que equivale una linea curva SM (fig. 182); imaginemos el punto m infinitamente próxîmo á M, y será Mm la diferencial de SM; y como $Mm = \sqrt{((Mr)^2 + (rm)^2)} = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, será $S\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ la fórmula para rectificar las curvas cuando sus ordenadas son perpendiculares al ege, ó no salen de un punto fijo. El modo de aplicarla es despejar en la ecuacion á la curva despues de diferenciada, el dy en x y dx, ó el dx en y y dy, sustituir estos valores en $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, y tomar la integral de lo que resulte.

550 1.º *Para rectificar la circunferencia del círculo*; tomemos $\frac{aadx}{aa+xx}$ elemento de un arco cuyo radio es a, y x su tangente (534): y pues que $\frac{aadx}{aa+xx} = aadx(aa+xx)^{-1}$, $(aa+xx)^{-1} = a^{-2} \times \left(1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} - \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} - \text{\&c.}\right)$; será $Saadx\,(aa+xx)^{-1} = S\left(dx - \frac{x^2dx}{aa} + \frac{x^4dx}{a^4} - \frac{x^6dx}{a^6} + \frac{x^8dx}{a^8} - \text{\&c.}\right) = x - \frac{x^3}{3a^2} + \frac{x^5}{5a^4} - \frac{x^7}{7a^6} + \frac{x^9}{9a^8} - \text{\&c.} = x\left(1 - \frac{x^2}{3a^2} + \frac{x^4}{5a^4} - \ldots\right.$

$\frac{x^6}{7a^6}+\frac{x^8}{9a^8}$ — &c.) Si en esta série suponemos que x sea la tangente de 45°, que cabe ocho veces en 360° ó en toda la circunferencia, y es igual al radio a; quedará reducida á $a(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+$ &c.)

Para hacer esta série mas convergente, descompongamos el arco de 45° en otros dos b, c cuyas tangentes sean conocidas, y tendremos haciendo el radio 1, $tang\,(b+c)=45°=1=(274)\frac{tang\ b+tang\ c}{1-tang\ b\times tang\ c}$; de donde se saca $tang\ c=\frac{1-tang\ b}{1+tang\ b}$: luego si $tang\ b=\frac{1}{2}$, será $tang\ c=\frac{1}{3}$. Póngase ahora en la série anterior $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ en lugar de a, y resultarán las dos $\frac{1}{2}-\frac{1}{3.2^3}+\frac{1}{5.2^5}-\frac{1}{7.2^7}+\frac{1}{9.2^9}$ — &c. y $\frac{1}{3}-\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}-\frac{1}{7.3^7}+\frac{1}{9.3^9}$ — &c. cuya suma 0,7853981633974483 &c. será la longitud de un arco de 45°: y de consiguiente su cuádruplo 3,141592653897932 &c. será la semicircunferencia, que comparada con el radio 1 dará la razon del diámetro á la circunferencia de que ya hemos hablado.

551 2.° *En la parábola* cuyo arco sea u, su parámetro $2a$, y su ecuacion $yy=2ax$; tendremos $ydy=adx$, y $dx^2=\frac{yydy^2}{aa}$: sustituido este valor en la fórmula $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, la

reduce á $\frac{dy}{a}\sqrt{(yy+aa)}=du$: luego $dy\sqrt{(yy+aa)}=adu$. Supongamos que sea MSN (fig. 184) la parábola que se ha de rectificar, que sea ST una tangente á su vértice, y $SP=y$; será $au=Sdy\sqrt{(yy+aa)}$. Si se tira la $Ss=a$ perpendicular á ST, y se traza una hipérbola equilátera nsp, cuyo centro esté en S y el vértice en s, tirando desde P á la parábola la ordenada PM alargada hasta que encuentre la hipérbola en p; será $SspP=Sdy\sqrt{(yy+aa)}$ (426 y 539): luego $Sadu=au=SspP$, y el arco $SM=u$ de la parábola, será igual al espacio hiperbólico $SspP$ partido por la mitad del parámetro.

552 3.° *Para rectificar un arco u de elipse, y de hipérbola*; sacaremos de la ecuacion á la elipse $y=\frac{b}{a}\sqrt{(aa-xx)}$, $dy=\frac{-bxdx}{a\sqrt{(aa-xx)}}$: y de consiguiente será el arco elíptico $u=Sdu=S\sqrt{(dx^2+dy^2)}=Sdx\sqrt{(1+\frac{dy^2}{dx^2})}=Sdx\sqrt{(\frac{a^4-a^2x^2+b^2x^2}{a\sqrt{(a^2-x^2)}})}$, cuyo valor solo se puede sacar por séries. En la hipérbola se encuentra por el mismo camino $Sdu=Sdx\frac{\sqrt{(a^2x^2-a^4+b^2x^2)}}{a\sqrt{(x^2-a^2)}}$.

553 Sea la ecuacion $y^3=px^2$ de la segunda parábola cúbica, en la que $x=$

$\frac{y^{\frac{3}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}}$: luego $dx = \frac{\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}dy}{p^{\frac{1}{2}}}$, $ydx^2 = \frac{9ydy^2}{4p}$... Será pues, $S(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = S(dy^2 + \frac{9ydy^2}{4p})^{\frac{1}{2}} =$ $Sdy(1 + \frac{9y}{4p})^{\frac{1}{2}} = \frac{8}{27}p(1 + \frac{9y}{4p})^{\frac{3}{2}} + C$. Suponiendo $y = 0$, resulta $C = -\frac{8}{27}p$; luego la integral completa ó la longitud de un arco cualquiera de la segunda parábola cúbica, contando sus abscisas desde el origen, es $\frac{8}{27}p$ $(1 + \frac{9y}{4p})^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27}p$.

554 En la cicloide ordinaria los triángulos semejantes Mmr, BOP (fig. 209) dan $dy : dx :: \sqrt{(2ax - x^2)} : x$; de suerte que $dy^2 = \frac{dx}{x}\sqrt{(2ax - x^2)} = \frac{dx\sqrt{(2a - x)}}{\sqrt{x}}$, $dy = \frac{2adx^2 - xdx^2}{x}$. Será pues, $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(dx^2 + \frac{2adx^2 - xdx^2}{x})} = \frac{dx\sqrt{2a}}{\sqrt{x}} = \ldots\ldots\ldots$ $\sqrt{2a}x^{-\frac{1}{2}}dx$: y $S(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = BM = S\sqrt{2a}x^{-\frac{1}{2}}dx = 2\sqrt{2ax}$, que es el duplo de la cuerda correspondiente $BO = \sqrt{2ax}$. Si se hace $x = 2a$, será la semicicloide $BMA = 2\sqrt{4a^2} = 2 \times 2a$, que es el duplo del diámetro del círculo generador: de consiguiente toda la cicloide será cuadrupla de dicho diámetro.

Solidez de los cuerpos

555 Si concebimos un cuerpo ABCS (fig. 185) formado de planos ó rebanadas infinitamente delgadas *acbcfh* que serán la diferencial de su solidez, y suponemos bb la superficie de la base ABC, a la altura ST, y x la St distancia del vértice al plano *acbcfh*: será dx la altura de dicho plano y su superficie *abc* ó *chf*, se hallará por la proporcion $(ST)^2$: $(St)^2$::ABC:*abc*, ó $aa:xx::bb:\frac{bbxx}{aa}$: luego la solidez del plano será $\frac{bbxx}{aa}\times dx$, y la de todo el sólido su integral S $\frac{bbxx}{aa}\times dx=$............ $\frac{bbx^3}{3aa}+C$, ó $\frac{bbx^3}{3aa}$ solamente, contando la solidez desde el vértice S. La espresion............. $\frac{bbx^3}{3aa}=\frac{bbxx}{aa}\times\frac{1}{3}x=abc\times\frac{1}{3}St$ concuerda con la que sacamos ya (241).

556 Si el plano MmlL (fig. 186) pertenece á un sólido de revolucion ABS, formado por una curva AS dando la vuelta al rededor de ST; suponiendo $PM=y$, $SP=x$, y $r:c$ la razon del radio á la circunferencia; será $\frac{cy}{r}$ la de un círculo cuyo radio es y; la superficie de este círculo será $\frac{cy}{r}\times\frac{1}{2}y=\frac{cyy}{2r}$:

y la solidez del plano $\frac{cyy}{2r} \times Pp = \frac{cyydx}{2r}$: espresion diferencial en la que poniendo el valor de y sacado de la ecuacion á la curva de cuya revolucion se haya formado el sólido, se tendrá su solidez integrando el resultado.

557 Egemplo 1.º *Encontrar la solidez del cono engendrado por el triangulo rectangulo* CPM (fig. 183) *al rededor de* CP. Sea CP, x; PM, y; y u el ángulo MCP: si tomamos á CM por radio, sera $cosen\ u : sen\ u :: x : y = \frac{x \times sen\ u}{cosen\ u}$. Si sustituimos este valor en la fórmula $\frac{cyydx}{2r}$; se reducirá á $\frac{c}{2r} \times$............ $\frac{sen^2 u}{cosen^2 u} x^2 dx$: y la solidez del cono será $\frac{c}{2r} \times$....... $S \frac{sen^2 u}{cosen^2 u} x^2 dx = \frac{c}{2r} \times \frac{sen^2 u}{cosen^2 u} \times \frac{x^3}{3} = \frac{cyy}{2r} \times \frac{x}{3}$;..... que es como digimos (241) la tercera parte del cilindro de una misma base y altura que el. Del mismo modo se hubiera sacado la solidez $\frac{2cxr}{r} \times \frac{y}{3}$ del cono producido por el mismo triángulo al rededor del lado MP.

558 2.º *La solidez del paraboloide ó conoide parabolico* (fig. 186), que es el solido que engendra una semiparábola al rededor de su ege; se saca poniendo en la formula el valor de yy que da la ecuacion $yy = ax$ de la parábola: pues integrando el resultado

$\frac{caxdx}{2r}$, se tiene contando la solidez desde S en que $C=0$, $\frac{cax^2}{4r}=\frac{cax}{2r}\times\frac{x}{2}=\frac{cyy}{2r}\times\frac{x}{2}$, que equivale á la solidez del cilindro de igual base y altura que el paraboloide. Si la solidez se cuenta desde un punto H, tal que $SH=b$; debiendo ser cero el sólido en dicho punto ó cuando $x=b$; será $C=-\frac{cabb}{4r}$, y la solidez de una porcion cualquiera de paraboloide $\frac{caxx-cabb}{4r}$.

559 3.º *Hallar la solidez del elipsoide ó hiperboloide.* Si sustituimos en la fórmula en lugar de yy, $\frac{bb}{aa}(2ax-xx)$ sacado de la ecuacion á la elipse, é integramos $\frac{cbb}{2raa}(2axdx-xxdx)$ que resulta; tendremos $\frac{cbb}{2raa}(axx-\frac{x^3}{3})$ por la solidez del *elipsoide prolongado*; sólido que engendra una semielipse al rededor de su ege mayor Ss (fig. 187), contándola desde S en que $C=0$. Cuando $x=Ss=2a$, se reduce dicha espresion á $\frac{2acbb}{3r}$, que es la solidez de todo el elipsoide. Y como la de un cilindro circunscripto á él, sería $\frac{acbb}{r}$; se-

rá la del elipsoide los $\frac{2}{3}$ de la de este cilindro, como lo digimos de la esfera (245).

Si se pide la solidez desde un punto H en que SH $= m$; siendo en este punto cero la integral, se tendrá $C = -\frac{cbb}{2raa}(amm - \frac{m^3}{3})$, y la solidez de una porcion de elipsoide comprendida entre dos planos paralelos y perpendiculares al ege, cuya distancia es $x-m$, será $\frac{cbb}{2raa}(axx - \frac{x^3}{3}) - \frac{cbb}{2raa}(amm - \frac{m^3}{3})$. La del *elipsoide aplanado*, ó producido por la revolucion de la semielipse al rededor del ege menor, que es $\frac{2aacb}{3r}$; se saca como la otra, y es tambien los $\frac{2}{3}$ de su cilindro circunscripto: y tiene con ella la razon de los eges $2b:2a$.

Por el mismo camino encontrarémos que la solidez del sólido que engendra una hipérbola al rededor de su primer ege, es $\frac{cbb}{2raa}\times$... $(axx + \frac{x^3}{3})$, si se cuenta desde el vértice; y $\frac{cbb}{2raa}(axx + \frac{x^3}{3}) - \frac{cbb}{2raa}(amm + \frac{m^3}{3})$ la de una porcion de *hiperboloide* comprendida entre dos planos paralelos y perpendiculares al ege, cuya distancia es $x-m$.

560 4.° *Hayase de medir el sólido producido por el arco sp* (fig. 184) *de hipérbola*

que voltea al rededor de su segundo ege ST, suponiendo este $2a$, el 1.º $2Ss = 2b$, $SP = x$, $Pp = y$, y S el vértice. Si hacemos $r : c :: 1 : \frac{c}{r}$, será $\frac{c}{r} \times \frac{1}{2} = \frac{c}{2r}$ que llamaremos m, el area del círculo cuyo radio es 1; y la fórmula $\frac{cyydx}{2r}$ quedará reducida á $myydx$, en donde myy es el area del círculo cuyo radio es y: pues $1^2 : y^2 :: m : myy$ (203). Si en ella ponemos el valor de yy sacado de la ecuacion $yy = bb + \frac{bbxx}{aa}$ (403); tendremos $myydx = mbbdx + \frac{mbbxxdx}{aa}$, cuya integral es $mbbx + \frac{mbbx^3}{3aa}$ ó $\frac{2}{3}mbbx + \frac{1}{3}myyx$, poniendo en lugar de $\frac{bbxx}{aa}$, $yy - bb$ sacado de la ecuacion: será pues, $\frac{2}{3}mbbx + \frac{1}{3}myyx$ la solidez del cuerpo que forma el area SspP al rededor de ST.

561 5.º *Para hallar la del cuerpo que se forma de la revolucion de una hipérbola equilátera* QKYN (fig. 169) *al rededor de su asintota* Cc; llamaremos CU = UY, a; y será (417) $aa = xy$, ó $yy = \frac{a^4}{xx}$. Puesto este valor en $\frac{cyydx}{2r}$, resulta $\frac{c}{2r} \times \frac{a^4 dx}{xx} = \frac{c}{2r} \times a^4 x^{-2} dx$, y su integral $\frac{c}{2r} \times -\frac{a^4}{x} + C$ será la solidez que buscamos. Como esta es

cero cuando $x=a$, será $C=\frac{c}{2r}a^3$, y el valor completo del sólido producido por el area UYNc, será $\frac{c}{2r}(a^3-\frac{a^4}{x})=\frac{c}{2r}(a^3\times$...............

$(\frac{x-a}{x}))$: de consiguiente suponiendo las abscisas a, $2a$, $3a$, &c. en progresion aritmética, resultarán sólidos iguales á $\frac{c}{2r}a^3$ multiplicados sucesivamente por 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ &c.

Si fuese x infinita, equivaldrá el sólido $\frac{c}{2r}a^3$ al cilindro engendrado en la misma revolucion por el rectángulo CUYH: cuando x es menor que a, es el sólido negativo, é infinito si $x=0$: de suerte que el sólido producido por el espacio UYNC es finito: pero el que engendra la area MCXK al rededor de la asíntota, es infinito.

562 6.º *Midamos ahora un cuerpo parabólico* ACBDA (fig. 188) *producido por la rotacion de la parábola* ACB *al rededor de la ordenada* AB. Sea a la abscisa CM, b la semiordenada AM ó BM, u la distancia MN= EP que hay entre la linea DC y una seccion ENF del sólido, paralela á DC: y tendremos (363) $(AM)^2:(EP)^2::CM:CP$, o $bb:uu::a:$ $CP=\frac{auu}{bb}$, y $EN=CM-CP=a-\frac{auu}{bb}=\frac{a}{bb}\times$

$(bb-uu)$: luego (556) $m\times(\text{EN})^2 = \frac{maa}{b^4} \times (b^4 - 2bbuu + u^4)$ será la espresion del area de la seccion ENF: y si se multiplica por la diferencial du de MN, dará el elemento del sólido $\frac{maa}{b^4}(b^4du - 2bbuudu + u^4du)$. Intégrese, y tendremos $\frac{maa}{b^4}(b^4u - \frac{2}{3}bbu^3 + \frac{1}{5}u^5)$, que se reduce haciendo $u = b$, á $\frac{8maab}{15}$ mitad del sólido que se busca.

563 7.° *Si se quiere la solidez del cuerpo* ACBDA (fig. 189) *que forma el segmento de circulo* ACB *rotando al rededor de la cuerda ú ordenada* AB; suponiendo el centro en O, y llamando al radio OE, r; OM, n; y EP, u; será $\text{OP} = \sqrt{((\text{OE})^2 - (\text{EP})^2)} = \sqrt{rr - uu}$), $\text{EN} = \text{OP} - \text{OM} = \sqrt{(rr-uu)} - n$; y la fórmula $myydx$ se transformará en $mdu(\sqrt{rr-uu)} - n)^2 = mdu(rr - uu + nn - 2n\sqrt{(rr-uu)}) = mdu(rr-uu-nn) - mdu(2n\sqrt{(rr-uu)} - 2nn)$. Y como la integral de $mdu(2n\sqrt{(rr-uu)} - 2nn) = 2nm \times du \times (\sqrt{(rr-uu)} - n) = 2nm \times du \times \text{EN}$, es $2mn \times area$ MNEC; será toda la integral $mu(rr - nn - \frac{1}{3}uu) - 2nm \times area$.............. $\text{MNEC} = m \times \text{MN} \times ((\text{AM})^2 - \frac{1}{3}(\text{MN})^2) - 2m \times \text{OM} \times area\,\text{MNEC}$: que en el supuesto de ser MN = MA, es $m \times \frac{2}{3}(\text{AM})^3 - 2m\text{OM} \times \text{ACM}$, valor de la mitad del sólido propuesto.

564 8.° *Para encontrar la solidez de un*

prismoide AEGB (fig. 190) *rodeado de superficies planas, y cuyas bases son dos rectángulos paralelos*; hagamos AB,a; AD,b; EH,c; EF,e; h la altura del sólido, y x la distancia variable del plano EG á una seccion IL del sólido paralela á la base. Tirando despues en la superficie AH, la HP paralela á EA, y en la cara BG la HN paralela á GC; tendremos en los triángulos HPB, HRM semejantes $h{:}x{::}$ $PB{=}AB{-}EH{:}RM{=}IM{-}EH{=}\frac{x(a-c)}{h}$; y en los triángulos HBN, HMQ, tambien semejantes, $h{:}x{::}BN{=}BC{-}HG{:}MQ{=}ML{-}HG{=}$ $\frac{x(b-e)}{h}$: luego $IM=\frac{x(a-c)}{h}+c$, y $ML=$ $\frac{x(b-e)}{h}+e$: y será el area de la seccion IL..$\frac{(a-c)(b-e)}{hh}xx+\frac{bc+ae-2ce}{h}x+ce$. Si multiplicamos esta espresion por dx, y sacamos despues su integral, resultará $\frac{(a-c)(b-e)}{3hh}x^3+\ldots$ $\left(\frac{bc+ae-2ce}{2h}\right)xx+cex$, valor del sólido IFGL.

Suponiendo en él $x=h$, saldrá el de todo el prismoide, que es $\frac{1}{3}h(a-c)(b-e)+\frac{1}{2}h(bc+ae-2ce+ceh=\frac{1}{6}h(2ab+ae+bc+2ce)=$ $\frac{1}{6}hAB{\times}AD{+}EH{\times}EF+(AB{+}EH)(AD{+}EF))$. Si EF fuese nula, EH y FG coincidirían formando un ángulo en la parte superior del só-

lido, que tendria entonces la forma de la armadura de un tejado: y su solidez sería $\frac{1}{6}h(2ab+bc)=\frac{1}{6}h(2\text{AB}+\text{EH})\text{AD}$. En el caso de ser $\text{EF}=\text{EH}$ y $\text{AD}=\text{AB}$; sería el sólido un trozo de pirámide cuadrada, cuya solidez es $\frac{1}{3}h(aa+ac+cc)=\frac{1}{3}h((\text{AB})^2+\text{AB}\times\text{EH}+(\text{EH})^2)$: y finalmente haciendo $\text{EH}=o$, resultaría una pirámide con la base $(\text{AB})^2$ y la altura h, que tendrá por solidez $(\text{AB})^2\times\frac{1}{3}h$.

565 9.° *La solidez del cuerpo* que los ingleses llaman *Croin* (fig. 191), cuyas secciones paralelas á la base son cuadrados y las dos secciones hechas perpendicularmente á la base por el medio de los dos lados opuestos, son semicírculos; la encontraremos suponiendo x la distancia Ab del vértice A á una seccion $cfeg$ paralela á la base, a el radio AB ó BN de la seccion circular ANBMA perpendicular á la base, y será $bn=\sqrt{(2ax-xx)}$ (350); el lado del cuadrado $cfeg$, $2\sqrt{(2ax-xx)}$, y su area $(4\,2ax-xx)$: luego el elemento del groin es $4dx(2ax-xx)$. Si en su integral $4axx-\frac{1}{3}x^3$ suponemos $x=a$, resulta $\frac{(2a)^3}{3}$ solidez de todo el groin; que sacariamos del mismo modo aun cuando las secciones paralelas á la base fuesen rectángulos, y las perpendiculares otras curvas distintas del círculo.

566 10.° *Si se hubiese de calcular la solidez de la pirámide ó cono* ABCD (fig. 192),

formado de rectas tiradas de todos los puntos de un plano DBC dado á un punto A: llamaremos x la distancia perpendicular AQ de A á una seccion EFG paralela á BDC, a la altura AP del sólido, b la area conocida de la base BDC: y pues que los planos BDC, EFG deben ser semejantes (236), tendremos $(AP)^2:(AQ)^2::BDC:EFG$, ó $aa:xx::b:EFG = \frac{bxx}{aa}$. Esta espresion multiplicada por la diferencial dx dará el elemento $\frac{bxxdx}{aa}$ del sólido, que será $S\frac{bxxdx}{aa} = \frac{bx^3}{3aa}$, que se reduce á $\frac{1}{3}ab$ cuando $x=a$.

567 11.° *Si á un cilindro* ABCD (fig. 176) *lo corta un plano oblicuo a la base, y se nos pide la solidez del cuerpo* SARH *que resulta*, que se llama *úngula cilíndrica*; suponiendo para hacer mas sencillo el cálculo, que la seccion pase por el centro de la base, se considerará la úngula cortada por planos paralelos infinitamente próximos y perpendiculares á la base RAH: y debiendo ser las secciones triangulares semejantes; se tendrá, llamando r el radio AO de la base, a la altura AS, y la base del triángulo PMN; OAS: PMN :: $rr:yy$ (202), y siendo OAS $= \frac{1}{2}ar$, será PMN $= \frac{aryy}{2rr} = \frac{ayy}{2r}$. Luego si se llama x la PH, será dx el grueso de la rebanada

comprendida entre dos planos paralelos, cuyo valor será $\frac{ayydx}{2rx}$, ó poniendo $2rx-xx$ en lugar de yy (350), $\frac{adx(2rx-xx)}{2r} = \frac{a}{2rx}(2rxdx-xxdx)$. Su integral, contando la solidez desde el punto H, es $\frac{a}{2r}\left(rxx-\frac{x^3}{3}\right)$: de donde se saca suponiendo $x=2r$, el valor de todo el sólido que es $\frac{2}{3}arr = \frac{ar}{2}\times\frac{4}{3}r =$ AOS$\times\frac{2}{3}$HO $=$ AOS$\times\frac{2}{3}$RH: ó los $\frac{2}{3}$ de un prisma cuya base seria el triángulo AOS y la altura el diámetro RH.

568 12.º *Encontremos por último, la solidez de una úngula cónica* EFGD (fig. 177) que corta en el cono ABD un plano EFG que pasa por su base. Siendo BC la altura perpendicular del cono, y BO una perpendicular tirada á HE ege de la seccion EFG; si suponemos que sea FBG otra seccion del cono hecha por un plano que pasa por el vértice B y la linea FG; los dos sólidos BDFG, EBFG cuyas bases son FDG, FEG, tendrán por solidez (564) á FDG$\times\frac{1}{3}$BC y FEG$\times\frac{1}{3}$BO: réstese la segunda de la primera, y su diferencia será el valor de la úngula cónica. Si las bases FDG, FEG fuesen secciones cónicas, se buscarán sus areas (542 y sig.), y se resolverá la cuestion. Sea por eg. EH pa-

aalela á BA; siendo entonces (357) la seccion una parábola cuya area es $\frac{2}{3}$FG×EH, será la solidez del segmento EFGB$=\frac{2}{9}$×FG×EH×BO, y rebajando esta cuantidad del sólido DFGB, será el residuo el valor de la úngula.

Medida de las superficies curvas de los sólidos

569 Si imaginamos que el lado infinitamente pequeño Mm de una curva SB$=u$ (fig. 186) traze una zona, faja ó porcion de cono truncado cuando toda la curva voltéa al rededor de ST; la superficie de dicha zona que es elemento de la total, será el producto de $Mm=du$ multiplicado por una circunferencia cuyo radio es PM: luego si llamamos m la razon entre la circunferencia y el diámetro, será $2my$ la circunferencia del círculo cuyo diámetro es ML, y $2my \times du = 2my \times \sqrt{(dx^2+dy^2)}$ será el elemento de la superficie de los sólidos de revolucion.

570 Egemplo 1.° *Comencemos por el cono recto* ABD (fig. 177), y suponiéndole cortado por un plano MN paralelo á la base, y tirado el ege BC; llamemos AB, a; AC, b; PM, y; BM, u; y tendremos en los triángulos semejantes BAC, BMP, BA : AC :: BM : MP ó $a:b::u:y=\frac{bu}{a}$: luego $2mydu=\frac{2mbudu}{a}$, y su integral $\frac{mbuu}{a}$ será la espresion de la super-

ficie de una porcion cualquiera del cono. Si en ella hacemos $u=a$, se reduce á $abm=m\times AC\times AB$ que es la de todo el sólido.

571 2.° *Para encontrar la superficie de la esfera*; sea el radio $CM=a$ (fig. 181), $SP=x$, $PM=y$, $SM=u$; será $Mm=du$, $Pp=Mr=dx$: y en los triángulos semejantes CPM, Mmr tendremos $PM:MC::Mr:Mm$, ó $y:a::dx:du=\frac{adx}{y}$. Sustituyendo este valor en $2mydu$, resulta $2madx$; y su integral $2max=SP\times$ *circunf.* SDBM'S, será la superficie del segmento esférico SPM M. Si se hace $x=2a$, $2max$ se convierte en $4maa$, que es la superficie de toda la esfera, cuadrupla de maa superficie del círculo máximo SDBM'S (227): y como $2max:4maa::x:2a$; será la superficie de un segmento á la de toda la esfera, como la altura del segmento á todo el ege.

572 3.° *Saquemos ahora la superficie del paraboloide* ASB (fig. 186). La ecuacion $yy=px$ de la parábola da $dx=\frac{2ydy}{p}$, y $dx^2=\frac{4yydy^2}{pp}$: luego $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\frac{dy\sqrt{(pp+4yy)}}{\sqrt{pp}}$; y $2mydu$ se reducirá á $\frac{2mydy}{p}\times(pp+4yy)^{\frac{1}{2}}$. Supongamos para integrar esta diferencial, $(pp+4yy)^{\frac{1}{2}}=z$, será $pp+4yy=zz$, y diferenciando, $8ydy=2zdz$ ó $2ydy=\frac{zdz}{2}$. Sustitúyase

este valor en $\frac{2mydy}{pp}(pp+4yy)^{\frac{1}{2}}$, y quedará reducida á $\frac{mz \times zdz}{2p}$, cuya integral es $\frac{mz^3}{6p}$, ó $\frac{m \times (pp+4yy)^{\frac{3}{2}}}{6p}$, poniendo $(pp+4yy)^{\frac{3}{2}}$ en lugar de z^3. Cuando $y=0$, se tiene $C=-\frac{1}{6}mpp$; de consiguiente $\frac{m(pp+yy)^{\frac{3}{2}}}{6p}-\frac{1}{6}mpp$ será la integral completa, que pudo tambien haberse sacado por lo dicho (516).

573 4.° *Para hallar la superficie del esferoide ó elipsoide* (fig. 187); suponiendo $SC=a$, $CB=b$ $CP=x$, y $BM=u$; sacarémos de la ecuacion á la curva $y=\frac{b}{a}\sqrt{(aa-xx)}$, $dy=-\frac{bxdx}{a\sqrt{(aa-xx)}}$: y será $du=\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\sqrt{\left(dx^2+\frac{bbxxdx^2}{aa(aa-xx)}\right)}=\frac{dx\sqrt{(a^4-(aa-bb)xx)}}{a\sqrt{(aa-xx)}}=\frac{dx\sqrt{(a^4-ccxx)}}{a\sqrt{(aa-xx)}}$ (suponiendo $\sqrt{(aa-bb)}=c$) $=\frac{cdx\sqrt{(\frac{a^4}{cc}-xx)}}{a\sqrt{(aa-xx)}}$: de consiguiente $2mydu$ será $\frac{2mbcdx}{aa}\times\sqrt{(\frac{a^4}{cc}-xx)}$: cuya integral espresada en série infinita, es $2mbx\left(1-\frac{ccxx}{2.3.a^4}-\frac{c^4x^4}{2.4.5.a^8}-\frac{3c^6x^6}{2.4.6.7a^{12}}-\&c.\right)$.

Esta integral se encuentra mas facilmente

por medio de la cuadratura del círculo; pues si desde C con un radio $\frac{aa}{c}$, se traza un cuadrante de círculo IER, y se alarga hasta E la ordenada PM; es claro (354) que PE $= \sqrt{(\frac{a^4}{cc} - xx)}$, y que el elemento del area EICP será $dx\sqrt{(\frac{a^4}{cc} - xx)}$, que tendrá con el elemento $\frac{2mbcdx}{aa}\sqrt{(\frac{a^4}{cc} - xx)}$ de la superficie bMM′B la razon de $1 : \frac{2mbc}{aa} \times \text{EIPC} = 2m \times \frac{Cb}{CI} \times \text{EICP}$.

Si para aplicar esta solucion al elipsoide aplanado, supusiéramos S*s* el ege menor; siendo CS menor que C*b*, sería imposible el valor de $c = \sqrt{(aa - bb)}$: con que hagamos $c = \sqrt{(bb - aa)}$, y $p = \frac{aa}{c}$; quedará $\frac{2mbcdx}{aa} \times \sqrt{(\frac{a^4}{cc} - xx)}$ convertida en $\frac{2mbdx}{p}\sqrt{(pp + xx)} = \frac{2mb}{p} \times dx\sqrt{(pp + xx)}$. Siendo $dx\sqrt{(pp + xx)} = \frac{dx \times (pp + xx)}{\sqrt{(pp + xx)}} = \frac{ppdx + xxdx}{(\sqrt{pp + xx})} = \frac{ppxdx + x^3dx}{\sqrt{(ppxx + x^4)}} = \frac{\frac{1}{2}ppxdx + x^3dx}{\sqrt{(ppxx + x^4)}} + \frac{\frac{1}{2}ppxdx}{\sqrt{(ppxx + x^4)}}$, cuyo primer término tiene por integral (516) á $\frac{1}{2}\sqrt{(ppxx + x^4)}$, y el segundo $\frac{\frac{1}{2}ppxdx}{\sqrt{(ppxx + x^4)}}$ ó $\frac{\frac{1}{2}ppdx}{\sqrt{(pp + xx)}}$) integrado por los logarítmos

(530), da $\frac{1}{2}pp \times l(x+\sqrt{(pp+xx)})$; será la integral de $dx\sqrt{(pp+xx)}$, $\frac{1}{2}x\sqrt{(pp+xx)}+\frac{1}{2}pp\times l(x+\sqrt{(pp+xx)})$: multiplíquese por $\frac{2mb}{p}$, y completándola despues (525), será la superficie del elipsoide aplanado $\frac{mbx}{p}\times\sqrt{(pp+xx)}+pbm\times l(\frac{x+\sqrt{(pp+xx)}}{p})$.

574 5.° *En el conoide hiperbólico*, siendo a y b los semieges, y x la distancia entre la ordenada y el centro de la curva; sacarémos de su ecuacion $y=\frac{b}{a}\sqrt{(xx-ax)}$, $dy=$......... $\frac{bxdx}{a\sqrt{(xx-aa)}}$: y será $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=$.................. $\frac{dx\sqrt{((aa+bb)xx-a^4)}}{a\sqrt{xx-aa)}}$. Luego $2mydu=\frac{2mbdx}{aa}\times(\sqrt{aa+bb})(xx-a^4)$, que con suponer......... $\frac{a^4}{aa+bb}=p^2$, se reduce á $\frac{2mbdx}{p}\sqrt{(xx-pp)}$. A su integral $\frac{mbx\sqrt{(xx-pp)}}{p}-pbml(x+\sqrt{(xx-pp)})$ que se encuentra por el mismo camino que la anterior, se ha de añadir la constante que resulta de suponer $x=a$: y será finalmente, $\frac{mbx}{p}\sqrt{(xx-pp)}-mbb-pbm\times l(\frac{x+\sqrt{(xx-pp)}}{a+\frac{bp}{a}})$, el verdadero valor de la superficie del hiperboloide.

575 6.° *Para hallar la superficie del groin* (fig. 191); supondremos x la distancia á que está del vértice A una seccion $cpeg$ paralela á la base, u el arco An correspondiente á la seccion semicircular NnA, y su radio AB ó BN$=a$. Siendo $du=\frac{adx}{\sqrt{(2ax-xx)}}$ (532), multiplicando esta cuantidad por $2\sqrt{(2ax-xx)}$ valor de $ge=2gn$, resultará $2adx$ (569), elemento de una de las cuatro superficies iguales que terminan al sólido: luego la superficie de todo él, no contando la de la base, será $8aa$, esto es, dupla de la dicha base.

Método inverso de las tangentes

576 Por este método se viene en conocimiento de la ecuacion de una curva por la espresion de su tangente ó subtangente ó normal &c. de su rectificacion, cuadratura &c. que se nos dé. Para esto se forma una ecuacion de la espresion dada y de la correspondiente fórmula de las halladas (475 *y sig.* 539, 549 &c.) y si se puede integrar, se tendrá la de la curva que se busca.

577 Para encontrar la ecuacion á la curva cuya subtangente es $\frac{2yy}{a}$: igualaré á ella la fórmula $\frac{ydx}{dy}$ (475 1.°), sacaré de $\frac{2yy}{a}=\frac{ydx}{dy}$,

$aax = 2ydy$, é integrando tendré $ax = yy$, ecuacion á la parábola (363). Si la subtangente es tercera proporcional á $a-x$, y; haremos $a-x:y::y:\frac{yy}{a-x}$: de consiguiente será $\frac{yy}{a-x} = \frac{ydx}{dy}$, $ydy = adx - xdx$, que integrada da $yy = 2ax - xx$, ecuacion del círculo (350).

578 Para encontrar la curva cuya subnormal es $a-x$; haremos (475 2.º) $\frac{ydy}{dx} = a-x$, $ydy = adx - xdx$; y su integral $\frac{1}{2}yy = ax - \frac{1}{2}xx$ ó $yy = 2ax - xx$ nos muestra que es el círculo. Si la subnormal ha de ser constante ó igual á 1; tendremos $\frac{ydy}{dx} = 1$, $ydy = dx$, y $yy = 2x$, ecuacion á una parábola cuyo diámetro es 2.

579 *Háyase de hallar ahora la curva cuya area es* $\frac{x^3}{3a}$. Diferencio esta espresion, é igualando el resultado $\frac{xxdx}{a}$ á la fórmula general ydx del elemento del area (539); tendré $\frac{xxdx}{a} = ydx$: de donde se saca $xx = ay$, ecuacion á la parábola. Finalmente, si dado el valor $\frac{c}{2r}(axx - \frac{x^3}{3})$ de una solidez, se pidiese la ecuacion de la curva que produjo el sólido; formaremos la ecuacion $\frac{cyydx}{2r} = \frac{c}{2r} \times (2axdx - xxdx)$, de la fórmula de la solidez

y de la diferencial de la espresion dada; y sacaremos de ella $yy=2ax-xx$, ecuacion al círculo: de consiguiente la espresion dada será la de la solidez de la esfera.

APÉNDICE

TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

580 El obgeto de esta parte de la geometría es *la resolucion de los triángulos esféricos* que se forman en la esfera con arcos de círculo máxîmo. No se cuenta con los arcos de círculos menores; porque entre dos puntos de la esfera pueden tirarse infinitos de diferentes grados, al mismo tiempo que por ellos solo puede trazarse un círculo máxîmo, que es aquel cuyo plano es determinado por el centro, y dichos dos puntos (171).

581 Supuesta la doctrina que dejamos dada acerca de los planos y sólidos; llamaremos *ege* de un círculo máxîmo HRDM (fig. 210) á un diámetro AB perpendicular á su plano, que pasa por el centro C de la esfera; y cuyos dos estremos A, B se llaman *polos*; y así desde cualquier punto de la circunferencia de un círculo máxîmo á su polo hay siempre 90.° De consiguiente, 1.° si un círculo máxîmo AHBD ó cualquiera parte suya es perpendicular á otro HRDM, cada uno pasa por los polos del otro: y al contrario, si pa-

sa por los polos, le será perpendicular; porque siendo perpendiculares los círculos, lo serán tambien sus planos; y por lo mismo el ege perpendicular al primero deberá estar en el segundo, y de consiguiente sus polos.

582 2.º Dos circulos máxîmos trazados en la esfera, se cortan mútuamente en dos partes iguales de 180° cada una: porque debiendo pasar ambos por el centro de la esfera, será la comun seccion uno de sus diámetros, que dividirá cada circulo por medio (175).

583 La inclinacion de dos planos AEB, ADB que se mide (177) con el ángulo rectilíneo ECD ó con el arco ED descrito desde el centro C, es la medida del ángulo esférico EAD, que se debe tomar trazando desde su vertice A como polo, el arco ED de círculo máxîmo entre sus lados AE, AD. Luego á los ángulos esféricos debe tambien convenir lo que dejamos demostrado (178) de los rectilíneos: y siempre se verificará que los lados contiguos de un ángulo esférico no pueden concurrir sino á una distancia de 180°: pues ambos son arcos de círculo máxîmo que se cortan en la superficie de la esfera.

584 Si desde los tres ángulos B, D, E de un triángulo esférico BDE se consideran tirados al centro de la esfera los radios BC, EC, DC se verá que dicho triángulo es la base de una pirámide CBED que tiene el vértice en el centro de la esfera, y cuyas super-

ficies laterales son tres sectores de círculo. Tambien se puede considerar como un ángulo sólido formado de los tres ángulos planos ECD, DCB, BCE: de suerte que cada ángulo del triángulo esférico es igual al ángulo de la inclinacion de las superficies, y cada lado es el arco que mide al ángulo plano del sector correspondiente. De lo cual, y de lo demostrado (213) podrémos inferir que dos lados de un triángulo esférico serán siempre mayores que el tercero; como tambien que sus tres lados valdrán siempre menos que 360°.

585 *Si desde los tres ángulos* A, B, C (fig. 211) *de un triángulo esférico como centro se trazan tres arcos de círculo que formen otro triángulo* DEF; *cada lado de este es suplemento del ángulo que es su polo: y cada ángulo suplemento del lado que se le opone en el triángulo* ABC. Pues siendo A polo del arco EF, distará el punto E de A 90° (581): y siendo C polo de DE, estará tambien á 90° de C: del mismo modo se probará que D es polo de BC, y F de AB.

En cuyo supuesto, alargando AB y AC hasta H y G en que encuentran á EF; por ser F polo de ABH, será tambien FH=90°: luego EG+FH ó EG+FG+GH=180°: y siendo GH medida del ángulo A (583); tendremos EF+A=180°, ó EF suplemento del ángulo A. Igualmente se prueba que DE es suplemento de C, y DF de B.

Finalmente, si se alarga AB hasta K, serán los dos arcos AH,BK de 90° cada uno, por ser A y B polos de EF y DF: luego AH+BK ó AH+AB+AK ó HK+AB= 180°; y como HK es medida del ángulo F (583) por ser F polo de HK; será F+AB=180°, ó F suplemento de AB: del mismo modo se demuestra que E es suplemento de AC, y D de BC. Del triángulo DEF, que se llama *suplementario*, se hace mucho uso en la trigonometría esférica.

586 Puesto que los tres ángulos A, B, C han de sumar con los tres lados EF, DF, ED tres veces 180° ó 540°: será siempre la suma de los tres ángulos de cualquier triángulo esférico ABC menor que 540°: será tambien mayor que 180°; pues la suma de los tres lados EF, DF, DE sus suplementos ha de ser menor que 360° (584).

De aquí es que un triángulo esférico puede tener sus tres ángulos rectos, y aun obtusos; y no siendo determinada la suma de los tres, no se podrá inferir el valor de uno, aunque se conozcan los otros dos como sucede en los rectilíneos. En lo sucesivo llamarémos *hipotenusa* al lado opuesto al ángulo recto que por entonces se considere, y á los otros dos ángulos, *oblicuos*.

587 Del mismo modo que en los triángulos rectilíneos, se demuestra que los esféricos son iguales en los tres casos mencionados (89 *y sig.*): pero estos son tambien iguales cuando

los tres ángulos del uno son iguales á los tres del otro. Lo que se demuestra por medio de los triángulos suplementarios: pues siendo iguales los ángulos, lo serán sus suplementos y de consiguiente los lados.

588 *En un triangulo esférico isósceles* ABD (fig. 212) *son iguales los ángulos* B, D *opuestos á los lados iguales* AB, AD: *y si son iguales los angulos, lo seran tambien los lados.* Pues tomando AE=AF, y tirando los arcos ED, BF de círculo máximo; serán iguales los triángulos AED, ABF que tienen el ángulo A comun comprendido entre los lados iguales AB, AF; AD, AE: luego ED=BF, y los triángulos BED, BDF que tienen BD comun, BF=ED y EB=FD, serán iguales: y de consiguiente el ángulo ABD=ADB. Al contrario, si son iguales los ángulos B y C (fig. 211) lo serán tambien sus suplementos DF, DE (585), esto es, será isósceles el triángulo DEF: luego sus ángulos E y F serán iguales, y de consiguiente sus suplementos los lados AB, AC.

589 *En todo triángulo esferico* ABC (fig. 212) *el mayor lado está opuesto al mayor ángulo, y al contrario.* Porque cortando en el ángulo B el ángulo ABD=A, será BD=AD (588): y pues que BD+DC es mayor que BC; será tambien AD+DC ó AC opuesto á B mayor que BC. La segunda parte se demuestra facilmente con el triángulo complementario DEF (fig. 210).

590 *Los ángulos oblicuos de un triángulo esférico son de la misma especie que sus lados opuestos, es decir, agudos, obtusos ó rectos.* Sea el triángulo BFG (fig. 210) rectángulo en G, cuyos lados alargados hasta A serán de 180° cada uno; es claro que si BG fuere agudo, GA será obtuso, y por consiguiente el ángulo BFG agudo tendrá agudo su lado opuesto BG: al obtuso AFG se opondrá el lado AG mayor que 90° en el triángulo AFG, y al recto BDE se opone BE de 90° en el triángulo BED que suponemos rectángulo en E.

591 *Si los lados de un triángulo esférico rectángulo fuesen de una misma especie, esto es, ambos agudos ó ambos obtusos, la hipotenusa será siempre aguda: y si fueren de distinta especie, la hipotenusa pasará de 90°.* Pues si en el triángulo BFG rectángulo en G, y cuyos lados BG, FG son agudos, se toma BD de 90°: será tambien BE de 90° por ser B el polo del arco ED; luego BF no llega á 90°.

Si en el triángulo AFG cuyos lados AF, AG pasan de 90°, llega á ser recto el ángulo A; debe ser tambien aguda la hipotenusa FG: porque si AF, AG pasan de 90°, no llegarán á 90°, sus suplementos BF, BG: y en el triángulo BGF tambien rectángulo en B, será la hipotenusa FG menor que 90°. Últimamente, si los lados fueren de diferente espe-

cie como en el triángulo AFG rectángulo en G, cuyo lado AG pasa de 90° y GF no llega, la hipotenusa AF pasa de 90°; pues entonces su suplemento BF debe ser menor que 90° como se ha probado ya.

592 Siendo los ángulos oblicuos de la misma especie que los lados opuestos (590), tendremos 1.° que si los ángulos oblicuos fuesen de una misma especie, será la hipotenusa menor que 90°, y será mayor si dichos ángulos fuesen de diferente especie. 2.° Si la hipotenusa fuere aguda, los ángulos y los lados serán de una misma especie, y de diferente si la hipotenusa pasa de 90°. 3.° Si la hipotenusa y uno de los lados fueren de la misma especie, el otro lado y su ángulo opuesto serán agudos: y obtusos, si la hipotenusa y el lado fueren de diferente especie. Todo lo cual se verifica en los dos triángulos BFG, AFG.

593 Finalmente, como dichos triángulos tienen el lado FG comun, un ángulo recto en G, el ángulo A igual á B, y las demas partes son diferentes; no se podrá resolver un triángulo esférico rectángulo dados un ángulo y su lado opuesto, si no se sabe ademas, si las otras partes pasan ó no de 90°.

Resolucion de los triángulos esféricos

594 Formen al triángulo ABD (fig. 213) rectángulo en A, los arcos DAF, DBF, ABE

de círculo máximo, y tirados los radios BC, DC, AC al centro C de la esfera, bájese desde B al plano BAC la perpendicular BI, que lo será tambien á AC (175); trazando despues por BI un plano BIG al cual sea perpendicular el radio DG, se tendrá una pirámide BICG formada de los triángulos rectángulos BIG, BCI, BCG, GIC cuyos tres ángulos ICG, ICB, BCG tienen respectivamente por medida los tres arcos AD, AB, BD del triángulo esférico ABD; y sus tres ángulos D, A, B son iguales á los rectilíneos IGB, GIB, IBG.

595 Esto supuesto, en cualquier triángulo esférico ABD rectángulo en A, se verifica 1.º *Que el seno del ángulo recto ó el radio es al seno de la hipotenusa, como el seno de uno de los otros ángulos es al seno de su lado opuesto*: esto es, *r*: *sen* BD:: *sen* D: *sen* AB. Pues en el triángulo rectángulo BIG se tiene (283) *r*: BG:: *sen* G:BI: y como tomando BC por radio en los triángulos CGB, CIB, BG BI son senos de los ángulos BCG, BCI ó de la hipotenusa BD y del lado AB, será *r*: BG ó *sen* BD::*sen* BGI ó *sen*D: *sen*AB.

596 De donde se infiere *que en cualquier triángulo esférico* ABD (fig. 214 y 215) *los senos de los ángulos son entre sí como los senos de los lados opuestos*: pues bajando desde cualquiera de sus ángulos A el arco AC perpendicular á la base BD, alargada si es menester; se tendrá en los triángulos rectángulos

BAC, ADC (595) *r*:*sen* AB::*sen* B:*sen* AC, y *r*: *sen* AD::*sen* D:*sen* AC; de donde se saca *sen* AB×*sen*B=*sen* AD×*sen* D: luego *sen* B:*sen* DC:: *sen* AD: *sen* AB.

597 2.° *Que el radio es al coseno de un ángulo como la tangente de la hipotenusa es á la tangente del lado adyacente á dicho ángulo*: ó *r*: *cos* D::*tang* BD:*tang* AD (fig. 213). Porque en el triángulo GBI, *r*:*cos*BGI:: GB:GI (284): y siendo en los triángulos rectángulos CGB, GCI, tomando á CG por radio, las GB, GI tangentes de los ángulos GCB, GCI ó de la hipotenusa BD y del lado AD; será *r*:*cos* BGI ó *cos* D:: *tang* GCB ó *tang* BD:*tang* GCI ó *tang* AD.

598 De consiguiente, en los dos triángulos esféricos ABC, ACD rectángulos en C (fig. 214 y 215), que tienen un lado AC comun *las tangentes de las hipotenusas* AB, AD *estan en razon inversa de los cosenos de los ángulos* BAC,CAD *adyacentes al lado comun* AC. Pues de *r*: *cos* BAC:: *tang* AB: *tang* AC, y *r*: *cos* DAC:: *tang* AD: *tang*AC, se saca *cos* BAC×*tang* AB = *r*×*tang* AC = *cos* DAC×*tang* AD: luego *tang* AB: *tang* AD:: *cos* DAC: *cos* BAC.

599 3.° *Que el radio es al seno de un lado como la tangente de un angulo adyacente es á la tangente del otro lado*: es decir (fig. 213) *r*: *sen* AD:: *tang* D: *tang* AB. Pues sacándose del triángulo BGI (184) *r* : *tang*

BGI::IG:IB, y siendo en los triángulos rectángulos CBI, CGI, en la suposicion de ser CI el radio, la IG seno del ángulo ICG ó del lado AD, y BI tangente del ángulo ICB ó del lado AB su opuesto; se tendrá r:IG ó *sen* AD:: *tang* BGI ó *tang* D: *tang* ICB ó *tang* AB.

600 Luego *en los triangulos* ACD (fig. 214 y 215) *los senos de los lados* BC,CD *no comunes serán reciprocamente como las tangentes de los ángulos* B,D: pues de r:*sen* BC:: *tang* B:*tang* AC, y r: *sen* CD::*tang* D : *tang* AC, se saca *sen* BC×*tang* B=r×*tang* AC= *sen* CD×*tang* D, y de consiguiente *sen* BC : *sen* CD :: *tang* D : *tang* B.

601 Divídanse ahora por medio en H, L (fig. 213) los semicírculos DAF, DBF, y trazando por ellos el arco LHP de círculo máximo que corte á ABE en un punto cualquiera P; serán rectos los ángulos en L y H: y de consiguiente PA, PL serán cuadrantes (590), P será el polo de AL, D de DL (581) y LH medirá al ángulo D y AL al ángulo P. Luego las seis partes que componen el triángulo BHP rectángulo en H, ó son iguales ó son complemento de las del triángulo ABD pues ademas del triángulo recto A=H, y ABD=HBP (583); el arco HP es complemento, y LH medida del ángulo D: el lado AB lo es de la hipotenusa BP, el lado AD del arco AL medida del ángulo P, y el lado HB lo es de la hipotenusa BD.

602 Tendráse pues 4.º *que en cualquier triángulo* ABD, *rectángulo en* A, *el radio es al coseno de uno de los lados; como el coseno del otro es al coseno de la hipotenusa*: ó $r : \cos AB :: \cos AD : \cos BD$. Porque siendo en el triángulo BHP rectángulo en H, $r : \text{sen}\, BP :: \text{sen}\, P : \text{sen}\, BH$ (595); será tambien, poniendo $\cos AB$ en lugar de $\text{sen}\, PB$, y $\cos AD$ en lugar de $\text{sen}\, P$ ó de su medida AL, $r : \cos AB :: \cos AD : \cos BD$.

603 *Serán pues, proporcionales en los triángulos* BAC,ACD (fig. 214 *y* 215) *los cosenos de las hipotenusas* AB,AD, *como los cosenos de los lados* BC,CD *segmentos de la base.* Lo cual se infiere de $r : \cos AC :: \cos BC : \cos AB$, y $r : \cos AC :: \cos CD : \cos AD$: de donde se saca $\cos BC : \cos AB :: \cos CD : \cos AD$, ó $\cos AB : \cos AD :: \cos BC : \cos CD$.

604 Esta última proporcion se convierte en $\cos AB + \cos AD : \cos AB - \cos AD :: \cos BC + \cos CD : \cos BC - \cos CD$: y sustituyendo en ella los valores de sus términos sacados (279), se tendrá $\text{cotang}\,\tfrac{1}{2}(AB + AD) : \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(AB - AD) :: \text{cotang}\,\tfrac{1}{2}(BC + CD) : \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(BC - CD)$: y estando las tangentes en razon inversa de las cotangentes, será finalmente, $\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(BC + CD) : \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(AB + AD) :: \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(AB - AD) : \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(BC - CD)$: es decir, *que en cualquier triángulo esférico* ABD, *si se baja un arco* AC *perpendicular sobre la base, alargada si es menester, será la tangente de la mi-*

tad de la base, á la tangente de la mitad de la suma de los otros dos lados AB,AD; *como la tangente de la mitad de su diferencia á la tangente de la mitad de la diferencia de los segmentos* BC,CD, *ó á la tangente de la mitad de su suma, si el arco perpendicular cae fuera.*

605 *En dicho triángulo* ABD (fig. 213) *el radio es al seno de un ángulo, como el coseno del lado adyacente es al coseno del otro ángulo*: ó *r*: *sen* B :: *cos* AB : *cos* D. Porque en el triángulo BHP (594) *r* : *sen* PBH::*sen* PB: *sen* PH : póngase por seno PBH su igual ABD, por seno PB, coseno AB, y por seno PH, coseno LH=*cos* D, y resultará la proporcion referida.

606 De ella se infiere *que en los triángulos* BAC,CAD (fig. 214 *y* 215) *los cosenos de los ángulos* B, D *opuestos al lado comun* AC, *son como los senos de los ángulos adyacentes* BAC,DAC : pues de *r*: *sen* BAC :: *cos* AC : *cos* B y *r*: *sen* CAD:: *cos* AC : *cos* D, se saca *sen* BAC : *cos* B::*r*: *cos* AC:: *sen* CAC: *cos* D: y de consiguiente *cos* B: *cos* D::*sen* BAC: *sen* CAD.

607 6.° Tambien se verifica en el triángulo BAD (fig. 213) *que el radio es al coseno de la hipotenusa como la tangente de un angugulo á la contangente del otro*: por sacarse del triángulo BPH (599) *r*: *sen* BH ó *cos* BD::*teng* B: *tang* PH=*cotang* LH=*cotang* D;

luego *r*: *cos* BD:: *tang* B : *cotang* D, que viene á ser lo mismo que *r*: *cot* B:: *cos* D: *cot* BD.

608 Por lo demostrado (597) se tiene (fig. 213 y 214) *r*: *cos* BAD:: *tang* AB: *tang* AC:: *cotang* AC: *cotang* AB (271), y de consiguiente *r*: *cotang* AC::*cos* BAD: *cotang* AB: por la misma razon *r* : *cotang* AD:: *cos* DAC: *cotang* AD: será pues, en el triángulo BAD *cos* BAC : *cos* DAC:: *cotang* AB : *cotang* AD: ó *los cosenos de los segmentos del vértice proporcionales á las cotangentes de los lados* AB, AD.

609 De lo dicho (599) se saca *r*:*sen* BC:: *tang* B: *tang* AC:: *cotang* AC: *cotang* B (270), y *r*: *sen* DC:: *cotang* AC: *cotang* B: luego en el triángulo ABD *sen* BC:*sen* DC :: *cotang* B: *cotang* D: esto es, *los senos de los segmentos* BC,CD *de la base proporcionales á las contangentes de los ángulos* B y D *adyacentes.*

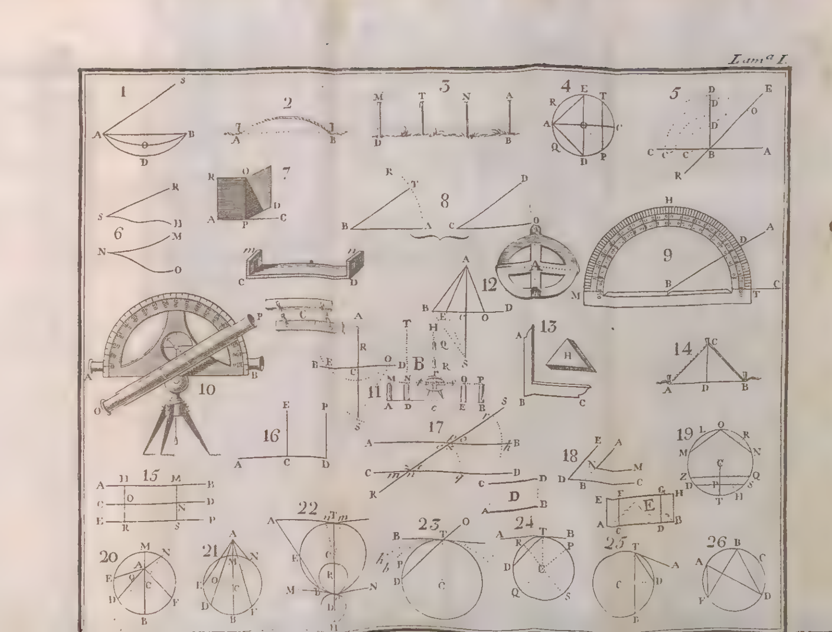
610 Por medio de las proposiciones establecidas se pueden resolver todos los casos en que dadas tres cosas de las que componen un triángulo esférico, se pida encontrar las otras tres: como se puede ver en las dos tablas siguientes, la una para los triángulos rectángulos, y la otra para los oblicuángulos: en las que para mayor sencillez en los cálculos se ha puesto el *r* igual á 1.

FIN.

TABLA PARA LA RESOLUCION DE TODOS LOS CASOS POSIBLES DE LOS TRIÁNGULOS ESFÉRICOS RECTÁNGULOS.

Datos	*Busco*	*Valores*	*Casos en que lo que se busca no llega á 90°*
1.° Hipotenusa y un lado	Ángulo opuesto al lado dado	*Su sen* $= \frac{\textit{sen lado dado}}{\textit{sen hipotenusa}}$ (595)	Si los datos son de una misma especie.
	Ángulo adyacente al lado dado	*Su cos* $= \frac{\textit{tang lado dado}}{\textit{tang hipotenusa}}$ (597)	Lo mismo.
	El otro lado	*Su cos* $= \frac{\textit{cos hipotenusa}}{\textit{cos lado dado}}$ (602)	Si el lado dado no llega á 90.°
2.° Un lado y el ángulo opuesto	Hipotenusa	*Su sen* $= \frac{\textit{sen lado dado}}{\textit{sen ángulo dado}}$ (592)	Dudoso.
	El otro lado	*Su sen* $= \frac{\textit{tang lado dado}}{\textit{tang ángulo dado}}$ ([illegible])	Dudoso.
	El otro ángulo	*Su sen* $= \frac{\textit{cos ángulo dado}}{\textit{cos lado dado}}$ (605)	Dudoso.
3.° Un lado y un ángulo adyacente	Hipotenusa	*Su tang* $= \frac{\textit{tang lado dado}}{\textit{cos ángulo dado}}$ (597)	Si los datos son de una misma especie.
	El otro ángulo	*Su cos*=*cos lado dado* × *seno ángulo dado* (605).	Si el lado dado es menor que 90°.
	El otro lado	*Su tang*=*sen lado dado* × *tang ángulo dado* (599).	Si el ángulo dado es menor que 90.°
4.° Hipotenusa y un ángulo	Lado adyacente	*Su tang*=*tang hipot.* × *cos ángulo dado* (597)	Si el ángulo fuere agudo.
	Lado opuesto al ángulo dado	*Su sen*=*sen hipot.* × *sen ángulo dado* (595)	Si los datos fueren de una misma especie.
	El otro ángulo	*Su tang* $= \frac{\textit{cot ángulo dado}}{\textit{cos hipotenusa}}$ (607)	Si la hipotenusa fuere menor que 90.°
5.° Los dos lados	Hipotenusa	*Su cos*=*rectángulo cos ángulos dados* (602)	Si los datos fueren de una misma especie.
	Un ángulo	*Su tang* $= \frac{\textit{tang lado opuesto}}{\textit{sen lado adyacente}}$ (599)	Si el lado opuesto fuere agudo.
6.° Los dos ángulos	Hipotenusa	*Su cos*=*rectángulo cot ángulos dados* (607)	Si los datos fueren de una misma especie.
	Un lado	*Su cos* $= \frac{\textit{cos ángulo opuesto}}{\textit{sen ángulo adyacente}}$ (605)	Si el ángulo opuesto fuere agudo.

Lamª I.



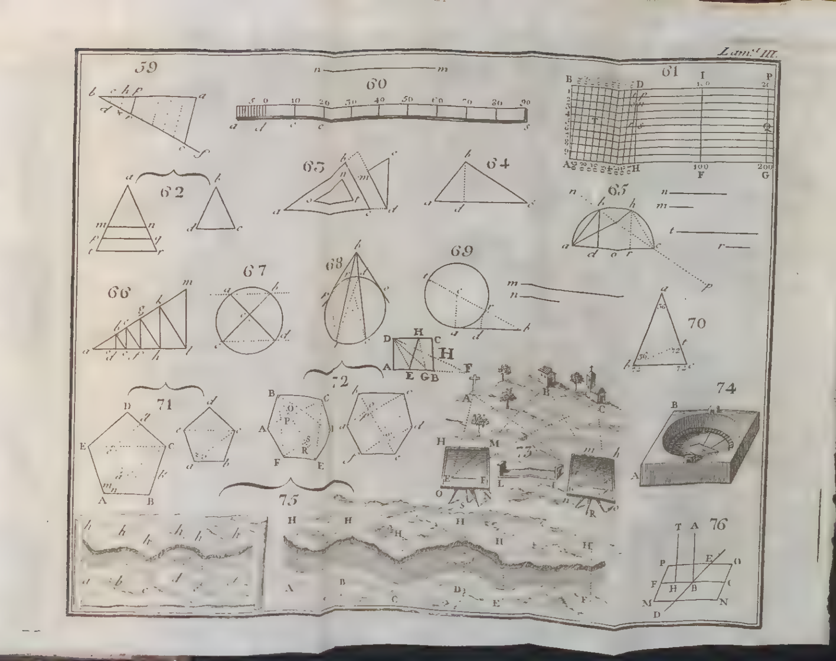
27 28 29 30 31 32 33

34 35 36 37 38 39 40

41 42 43 44 45 46 47

48 49 50 51 52 53

54 55 56 57 58


Lam.ª III.
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76

77 78 79 80 81 82

83 84 85

86 87 88 89 90

91 92 93 94 95

96 97 98 99 100

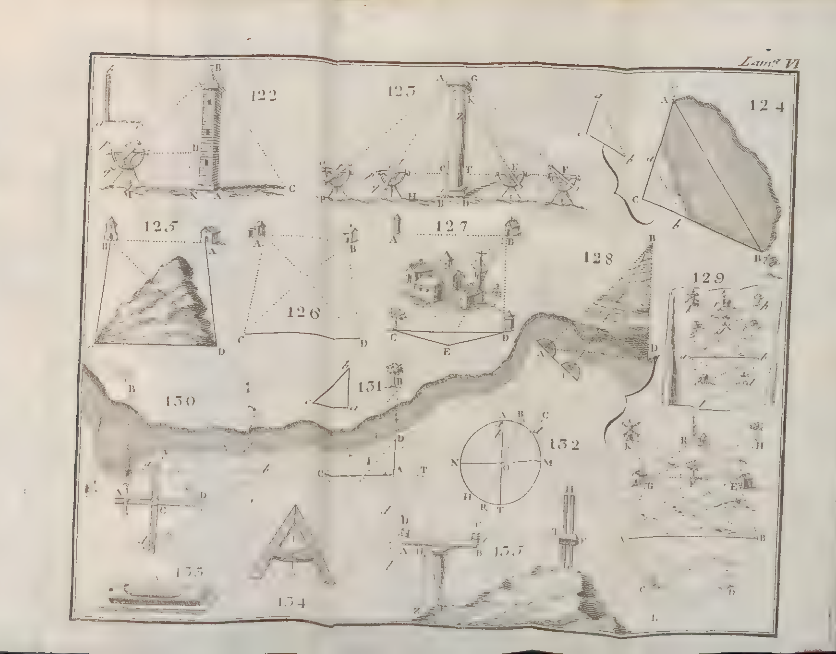
101 102 103 104 105

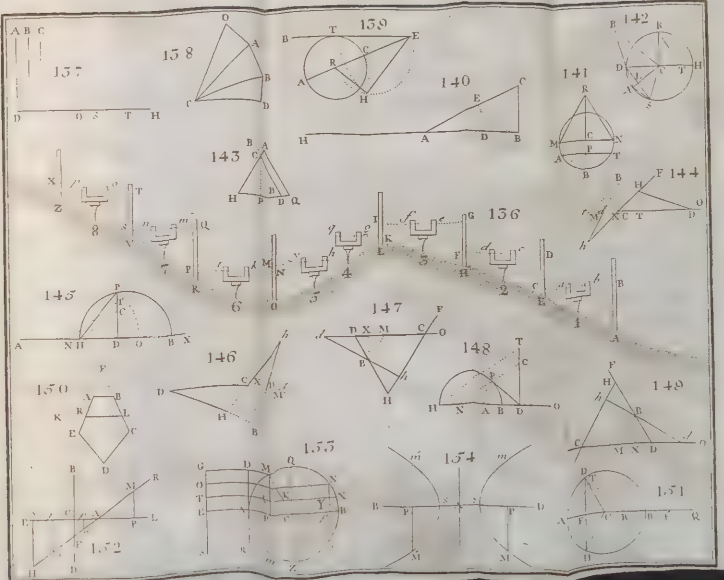
106 107 108 109 110

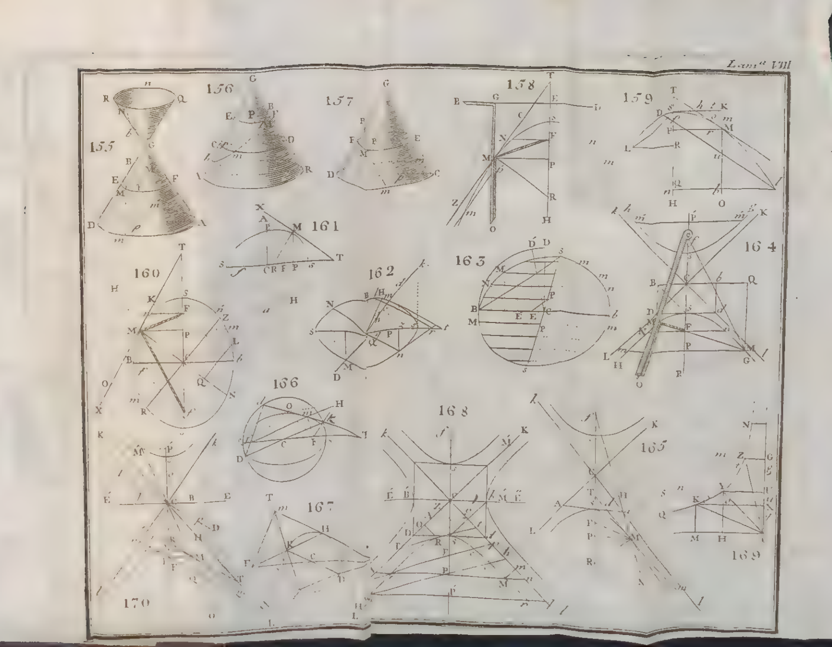
111 112 113

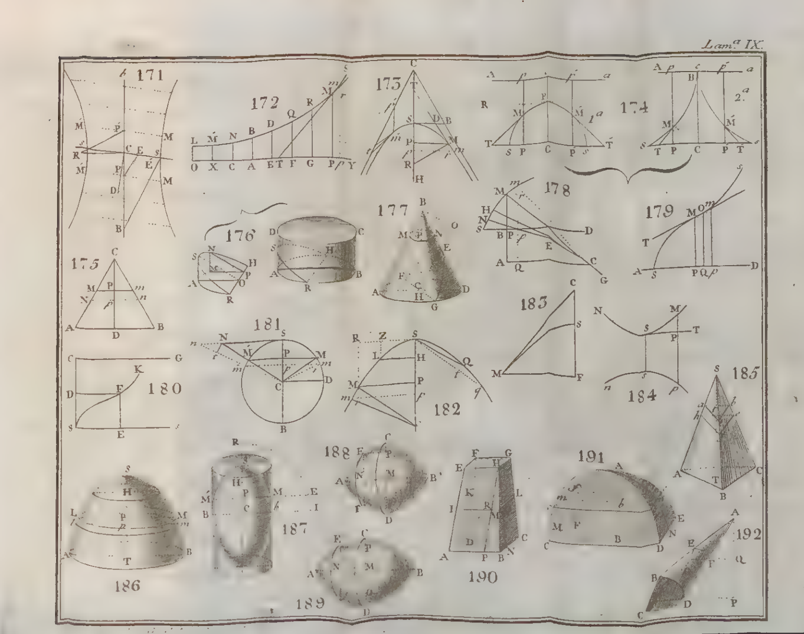
114 115 116 117 118

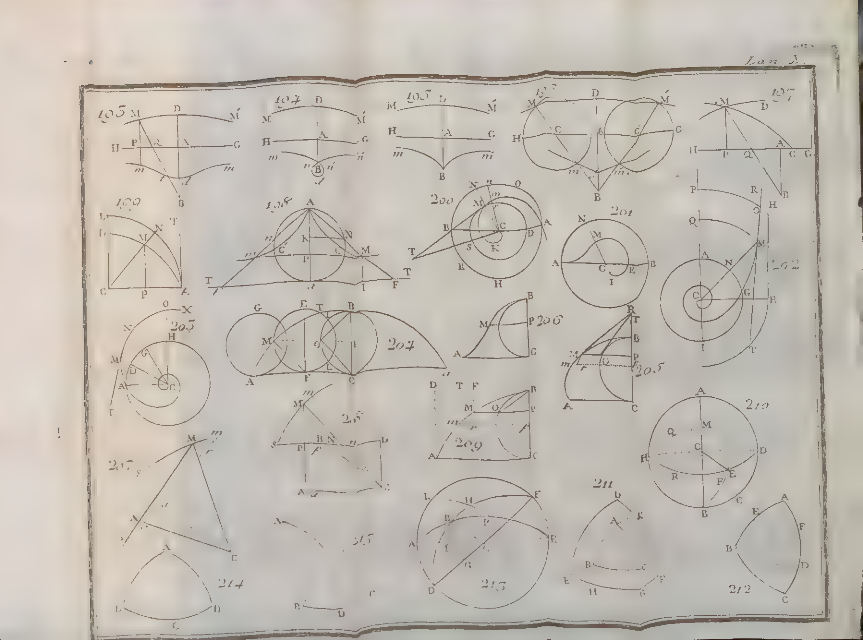
119 120 121


Lam.ª VI
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135


137
138
139
142
141
140
143
144
136
8
7
6
5
4
3
2
1
145
147
148
146
149
150
153
154
151
152

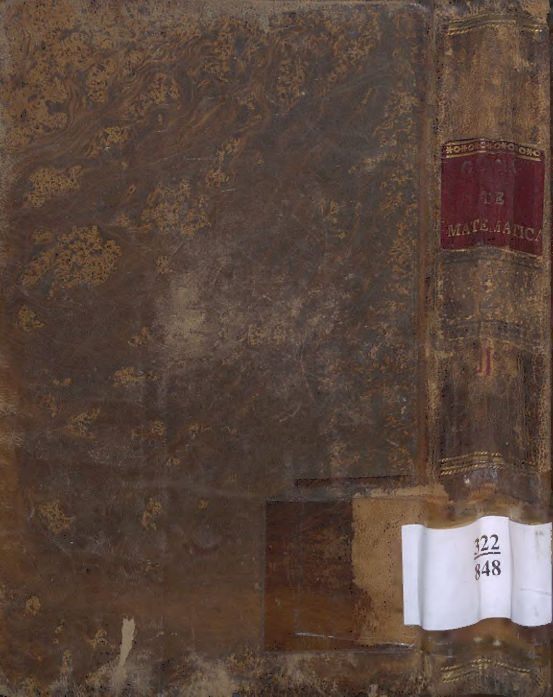

Lamª VIII
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
168
169
170


Lam.a IX.
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192


Lam. I.
193
194
195
196
197
198
199
200
201
202
203
204
205
206
207
208
209
210
211
212
213
214
215




FA/350 - II
500224425
FQU ~~I 0523~~ II


DE
MATEMATICA
II


colorchecker CLASSIC
calibrite
mm